



国防科技图书出版基金

■ 费保俊 编著

相对论在现代导航中的应用

Application of Relativity in Modern Navigation

(第2版)



国防工业出版社
National Defense Industry Press

责任编辑：胡翠敏
责任校对：苏向颖
封面设计：王 媛

cmhu@ndip.cn

相对论 在现代导航中的应用

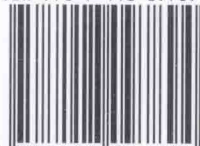
(第2版)



► 上架建议：卫星导航 ◀

<http://www.ndip.cn>

ISBN 978-7-118-09789-4



9 787118 097894 >

定价：68.00 元



国防科技图书出版基金

相对论在现代导航中的应用

(第2版)

Application of Relativity in Modern Navigation

费保俊 编著

国防工业出版社

· 北京 ·

图书在版编目 (CIP) 数据

相对论在现代导航中的应用 / 费保俊编著. —2 版
—北京: 国防工业出版社, 2015. 1
ISBN 978 - 7 - 118 - 09789 - 4

I. ①相... II. ①费... III. ①相对论 - 应用 -
卫星导航 IV. ①TN967. 1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 307636 号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

北京嘉恒彩色印刷有限责任公司

新华书店经售

*

开本 710 × 1000 1/16 印张 17 1/4 字数 300 千字

2015 年 1 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—2000 册 定价 68.00 元

(本书如有印装错误, 我社负责调换)

国防书店: (010) 88540777

发行邮购: (010) 88540776

发行传真: (010) 88540755

发行业务: (010) 88540717

致 读 者

本书由国防科技图书出版基金资助出版。

国防科技图书出版工作是国防科技事业的一个重要方面。优秀的国防科技图书既是国防科技成果的一部分,又是国防科技水平的重要标志。为了促进国防科技和武器装备建设事业的发展,加强社会主义物质文明和精神文明建设,培养优秀科技人才,确保国防科技优秀图书的出版,原国防科工委于1988年初决定每年拨出专款,设立国防科技图书出版基金,成立评审委员会,扶持、审定出版国防科技优秀图书。

国防科技图书出版基金资助的对象是:

1. 在国防科学技术领域中,学术水平高,内容有创见,在学科上居领先地位的基础科学理论图书;在工程技术理论方面有突破的应用科学专著。
2. 学术思想新颖,内容具体、实用,对国防科技和武器装备发展具有较大推动作用的专著;密切结合国防现代化和武器装备现代化需要的高新技术内容的专著。
3. 有重要发展前景和有重大开拓使用价值,密切结合国防现代化和武器装备现代化需要的新工艺、新材料内容的专著。
4. 填补目前我国科技领域空白并具有军事应用前景的薄弱学科和边缘学科的科技图书。

国防科技图书出版基金评审委员会在总装备部的领导下开展工作,负责掌握出版基金的使用方向,评审受理的图书选题,决定资助的图书选题和资助金额,以及决定中断或取消资助等。经评审给予资助的图书,由总装备部国防工业出版社列选出版。

国防科技事业已经取得了举世瞩目的成就。国防科技图书承担着记载和弘扬这些成就,积累和传播科技知识的使命。在改革开放的新形势下,原国防科工委率先设立出版基金,扶持出版科技图书,这是一项具有深远意义的创举。此举势必促使国防科技图书的出版随着国防科技事业的发展更加兴旺。

设立出版基金是一件新生事物,是对出版工作的一项改革。因而,评审工作需要不断地摸索、认真地总结和及时地改进,这样,才能使有限的基金发挥出巨大的效能。评审工作更需要国防科技和武器装备建设战线广大科技工作者、专家、教授,以及社会各界朋友的热情支持。

让我们携起手来,为祖国昌盛、科技腾飞、出版繁荣而共同奋斗!

国防科技图书出版基金

评审委员会

国防科技图书出版基金 第七届评审委员会组成人员

主任委员 潘银喜

副主任委员 吴有生 傅兴男 杨崇新

秘书长 杨崇新

副秘书长 邢海鹰 谢晓阳

委员 才鸿年 马伟明 王小谟 王群书
(按姓氏笔画排序)

甘茂治 甘晓华 卢秉恒 巩水利

刘泽金 孙秀冬 芮筱亭 李言荣

李德仁 李德毅 杨伟 肖志力

吴宏鑫 张文栋 张信威 陆军

陈良惠 房建成 赵万生 赵凤起

郭云飞 唐志共 陶西平 韩祖南

傅惠民 魏炳波

前 言

中国科学技术协会主席周光召先生在纪念“2005——国际物理年”的一次活动中特别指出,爱因斯坦最伟大的成果——广义相对论在实际生产和生活中的一个重要应用就是现在已经运行的 GPS 等卫星导航系统,这种应用研究应该引起我国科技工作者的重视。

确实,如果说狭义相对论的应用比较广泛的话,广义相对论对于我们的生产和生活的直接影响并不是很大,只是在宇宙学和天文观测等科学研究领域得到了实际的应用。这是因为爱因斯坦的广义相对论和牛顿的万有引力理论是要解决相同的问题,它们的区别在于前者更深入地理解了自然现象的本质,因而更深刻地揭示了事物的本质,得到了更精确的结论。由于我们实际的生产和生活并不涉及到很高的精确度,一般情况下并不需要考虑广义相对论效应。正因如此,爱因斯坦在 1915 年建立的广义相对论至今仍然只是在科学家的研究活动中得到应用,许多人对它的认识也只是限于一些“奇妙”的结论而已。

然而,我国的 COMPASS、美国的 GPS、俄罗斯的 GLONASS、欧洲的 GALILEO 等一系列卫星导航工程的建立改变了这一现状。它们是通过测量地球引力场中卫星到接收机的光信号传播时间来确定接收机的位置和速度等参数,不仅与狭义相对论而且与广义相对论存在着紧密的联系,具体体现在以下 3 个方面:

(1) 卫星导航的基本测量原理正是基于爱因斯坦的光速不变原理,即无论卫星相对于接收机的运动状态如何,由它发射的光波在真空中的传播速度恒为 c 。可以说,没有光速不变性也就没有卫星导航。尽管国外有人对这个问题提出异议,但我们看不出这些观点有什么道理,也没有得到学术界的认可。

(2) 从实用的角度来说也是最重要的一点,广义相对论效应直接影响到卫星导航系统的测量精度。例如广义相对论的引力和多普勒频移导致卫星钟与接收机的标准时间不同步,为了保证测量精度,在导航实践中根据相对论效应将卫

星钟的频率做了调整。这些相对论效应对于高精度的军用导航的影响则是绝对不能忽略的。否则,目标的定位就不准确,导弹的飞行就要偏离航线。

(3) 从理论分析的角度来看,卫星导航涉及到地球引力场的弯曲时空结构,非惯性系的时间和空间概念,光子以及卫星和接收机在引力场中的运动,光传播时间和距离的测量等问题,这些正是相对论时空理论要解决的基本问题。用相对论测量理论对导航实践做进一步的深入探讨,是现代导航技术研究领域的一个重要课题。

如果说一般相对论效应对卫星导航系统的影响不是太明显,现在正在研制中的天体导航系统——X射线脉冲星自主导航系统(XNAV)则完全是建立在相对论基础上的一种更加先进的发明。XNAV是通过测量X射线脉冲星发射脉冲的传播时间来确定接收机的空间位置。由于光传播的距离非常遥远,经历的太阳系乃至宇宙空间的引力场较强,因而光传播的相对论效应不可忽略,我们必须在相对论框架内对XNAV的运行进行分析处理。本书第2版又增加了“空间惯性导航的相对论效应”一章,因为高精度空间惯性导航必然是未来航天器和军事空间装备的一个重要发展方向,只是目前的定位精度要求不高,因而忽略了相对论效应的影响。

基于上述多方面的考虑,我们在有关专家的关心和指导下,综合整理了国内外的相关文献(包括技术报告),并融入作者的一些研究体会撰写成本书。其目的主要是抛砖引玉,为我军未来的卫星导航定位系统和航天工程提供一些资料,以期引起相对论和卫星测量、通信、导航等领域科技工作者的重视和深入探讨。中国引力 and 相对论天体物理协会原理事长刘辽先生认为,加强相对论在工程技术上的应用方面的工作不仅有利于提高工程质量,也有利于相对论的普及,让相对论理论成为科技工作者的研究工具。

本书第1版出版以来,收到不少读者的反馈,也得到了我国航空航天、空间技术和导航领域一些专家学者的关注。根据有关专家和许多读者的建议,结合近年来国内外的研究成果和作者的研究体会,本书第2版对第1版做了全面的修改和扩充,希望较为系统地阐明相对论与空间导航技术的关系。前3章在简单介绍狭义和广义相对论基本原理的基础上,重点论述相对论的后牛顿近似理论,因为实践证明它完全可以满足在太阳系范围内的天文测量和空间技术领域

涉及的问题。后4章分别讨论相对论在卫星导航、脉冲星导航和空间惯性导航中的应用。另外,因为本书主要讨论相对论与现代导航的关系,对于工程技术上的经典理论和计算方面的内容叙述得比较简单,读者可以参考有关的著作。

在本书第1版和第2版的撰写过程中,得到了周光召院士、李惕碛院士、魏子卿院士、叶培建院士、刘辽教授、赵峥教授、须重明教授、韩春好教授、徐仁新教授、郑伟教授、杨廷高研究员、卢方军研究员、陈勇研究员、帅平研究员、姚国政博士和许多读者的关心和支持,国防科技图书出版基金会的评委和责任编辑胡翠敏女士提出了许多中肯的意见,在此表示衷心感谢。

本书是在应用相对论方面的初步尝试,加之作者的水平和能力所限,书中可能存在一些不妥,愿就教于各位读者。

作者

2014. 7. 20

目 录

第 1 章 狭义相对论基础	1
1.1 狭义相对论基本原理	1
1.1.1 基本原理和时空间隔不变性	1
1.1.2 固有洛伦兹变换和时空观	3
1.1.3 因果律和光速极值原理	6
1.2 4 维闵可夫斯基空间	8
1.2.1 闵氏空间的几何结构	8
1.2.2 闵氏空间的度规和坐标变换	11
1.2.3 闵氏空间的张量分析	13
1.3 狭义相对论力学	16
1.3.1 4 维位移、速度和加速度	16
1.3.2 4 维动量和运动方程	18
1.3.3 高速火箭的 Ackeret 公式	20
1.3.4 4 维能量动量张量	21
1.3.5 4 维自旋矢量和角动量	24
1.4 光波的频移和行差效应	27
1.4.1 相位不变性和波阵面方程	27
1.4.2 多普勒频移效应	29
1.4.3 多普勒计数测量原理	31
1.4.4 光行差效应	33
参考文献	35
第 2 章 广义相对论基础	36
2.1 基本原理及其几何基础	36
2.1.1 牛顿引力理论及其困难	36
2.1.2 广义相对性原理和等效原理	38
2.1.3 广义时空间隔不变性	41
2.1.4 黎曼几何的基本概念	44

2.1.5	伪黎曼时空的力学规律	50
2.2	球对称天体的引力场	51
2.2.1	爱因斯坦引力场方程	51
2.2.2	史瓦西度规及其牛顿近似	54
2.2.3	克尔度规及其牛顿近似	56
2.3	引力场中的时间和空间	57
2.3.1	坐标时和固有时	58
2.3.2	原子钟环球飞行实验	61
2.3.3	坐标长度和固有长度	62
2.3.4	引力场中的可观测量	64
2.3.5	引力场中的时空测量	67
2.3.6	光传播的时空测量	69
2.4	引力场中的运动方程及其效应	71
2.4.1	弯曲时空的测地线方程	71
2.4.2	自由质点运动方程及其牛顿近似	73
2.4.3	史瓦西场中质点轨迹和进动效应	74
2.4.4	史瓦西场中光子轨迹和弯曲效应	77
2.4.5	光传播时间的引力延缓效应	81
2.4.6	光波的引力和多普勒频移	82
	参考文献	87
第3章	后牛顿引力理论	88
3.1	引力场的后牛顿近似	88
3.1.1	度规和联络的级数表示	88
3.1.2	后牛顿近似的场方程和度规	91
3.1.3	DSX 体系的场方程和度规	93
3.1.4	太阳系天体的标量势和矢量势	95
3.1.5	质点和光子的后牛顿运动方程	98
3.2	后牛顿理论的时间和空间	100
3.2.1	太阳系质心和地心天球参考系	101
3.2.2	太阳系质心系与地心系的时空变换	103
3.2.3	太阳系质心系的度规和质心坐标时	107
3.2.4	地心系的度规和地心坐标时	110
3.2.5	地球系的度规和地球时	112

3.2.6	相对论时间尺度及其相互关系	114
3.3	光传播轨迹和时间的后牛顿修正	116
3.3.1	1PN 轨迹方程及其弯曲效应	116
3.3.2	2PN 轨迹方程及其弯曲效应	117
3.3.3	光传播时间的 2PN 引力延缓效应	120
3.3.4	地球系中光传播时间的 Sagnac 效应	123
3.4	卫星运行轨迹的后牛顿修正	125
3.4.1	卫星的经典无摄运动方程	125
3.4.2	卫星运动状态及其测量	127
3.4.3	卫星的经典摄动运动方程	130
3.4.4	GCRS 中卫星的 1PN 轨迹	132
3.4.5	GCRS 中卫星轨迹的 2PN 修正	135
3.4.6	BCRS 中卫星轨迹的 2PN 修正	137
	参考文献	140
第 4 章	卫星导航的相对论效应	142
4.1	卫星导航的基本测量原理	142
4.1.1	卫星导航概述	142
4.1.2	卫星导航原理与光速不变性	145
4.1.3	卫星导航中的相对论效应	146
4.2	卫星钟的相对论修正	149
4.2.1	卫星导航的时间和空间系统	149
4.2.2	卫星钟与系统标准钟的同步	151
4.2.3	卫星椭圆运动产生的钟差	153
4.2.4	关于卫星相对论钟差的讨论	155
4.3	测码和测相伪距方程	157
4.3.1	测码伪距方程	157
4.3.2	卫星与接收机的相对论钟差	158
4.3.3	卫星到接收机距离的相对论意义	159
4.3.4	测相伪距方程的引力效应	162
4.3.5	多普勒测量方程的引力效应	164
	参考文献	167
第 5 章	X 射线脉冲星导航的相对论模型	168
5.1	X 射线脉冲星导航概述	168

5.1.1	基于天体的天文自主导航	169
5.1.2	基于 X 射线脉冲星的自主导航	171
5.1.3	X 射线脉冲星的观测特性	173
5.1.4	X 射线脉冲星的导航参数	176
5.2	XNAV 中的时间测量	179
5.2.1	BCRS 中的光传播时间方程	180
5.2.2	SSB 为基准的观测方程	182
5.2.3	SSB“等效时间”为基准的观测方程	184
5.2.4	航天器固有时与地球时的转换	186
5.3	BCRS 中的绝对定位模型	188
5.3.1	多普勒速度观测方程	188
5.3.2	位置和速度联合观测方程	190
5.3.3	观测轮廓的叠加及频偏估计	192
5.3.4	观测轮廓与标准轮廓的时延估计	195
5.3.5	日地系平动点晕轨道卫星导航	198
5.4	GCRS 中的相对定位模型	203
5.4.1	地心为基准的联合观测方程	204
5.4.2	GCRS 中的相对定位法	205
5.4.3	地球静止卫星为基站的相对定位	207
	参考文献	210
第 6 章 相对论定位系统及其应用前景		213
6.1	相对论定位系统基本原理	213
6.1.1	正交标架与零标架	213
6.1.2	零标架中的光坐标	216
6.1.3	零标架与观测者的关系	218
6.2	脉冲星导航的相对论定位法	222
6.2.1	2 维平直时空的相对论定位法	222
6.2.2	4 维弯曲时空的相对论定位法	224
6.2.3	相对论与 TOA 定位的比较	226
	参考文献	229
第 7 章 空间惯性导航的相对论效应		230
7.1	惯性导航的基本原理	230

7.1.1	惯性导航系统概述	230
7.1.2	惯性导航的基本概念	231
7.1.3	TRS 和 GCRS 中的比力方程	232
7.2	空间加速度计的相对论效应	234
7.2.1	航天器的惯性运动——测地线方程	234
7.2.2	航天器内的潮汐力——测地偏离方程	236
7.2.3	抵消潮汐力的加速度计组合	239
7.3	空间陀螺仪的相对论效应	242
7.3.1	陀螺仪的经典测量原理	242
7.3.2	弯曲时空的矢量平移	244
7.3.3	空间陀螺仪的测地进动	247
7.3.4	空间陀螺仪的 Lense-Thirring 进动	248
7.3.5	测地进动和 Lense-Thirring 进动的实验验证	251
	参考文献	252
	天文常数表	254

CONTENTS

Chapter 1	The Foundation of Special Relativity	1
1.1	Basis Principle of Special Relativity	1
1.1.1	Basis Principle and Invariance of Spacetime Interval	1
1.1.2	Proper Lorentz Transformation and Concept of Spacetime	3
1.1.3	Causality and Principle of Limiting Light Speed	6
1.2	4-Dimension Minkowski Space	8
1.2.1	Geometrical Structure of Minkowski Space	8
1.2.2	Metric and Coordinates Transformation of Minkowski Space	11
1.2.3	Tensor Analysis in Minkowski Space	13
1.3	Special Relativistic Mechanics	16
1.3.1	4D Displacement, Velocity and Acceleration	16
1.3.2	4D Momentum and Motion Equation	18
1.3.3	Ackeret Formula for the High-speed Rocket	20
1.3.4	4D Energy-Momentum Tensor	21
1.3.5	4D Spin Vector and Angular Momentum	24
1.4	Frequency Shift and Aberration of Light Wave	27
1.4.1	Invariance of Phase and Equation of Wave Front	27
1.4.2	Doppler Frequency Shift Effect	29
1.4.3	Measurement Principle of Doppler Count	31
1.4.4	Aberration Effect of Light	33
	References	35
Chapter 2	The Foundation of General Relativity	36
2.1	Basis Principle and Foundations of Geometry	36
2.1.1	Newton's Gravitational Theory and Its Crisis	36

2. 1. 2	Principle of General Relativity and Equivalence	38
2. 1. 3	General Invariance of Spacetime Interval	41
2. 1. 4	Basic Concepts of Riemannian Geometry	44
2. 1. 5	Mechanics in Pseudo-Riemannian Spacetime	50
2. 2	Gravitational Field around Spherically Symmetric Celestial Body	51
2. 2. 1	Einstein's Equation of Gravitational Field	51
2. 2. 2	Schwarzschild Metric and Newtonian Approximation	54
2. 2. 3	Kerr Metric and Newtonian Approximate	56
2. 3	Time and Space in Gravitational Field	57
2. 3. 1	Coordinate Time and Proper Time	58
2. 3. 2	Experiment of Atomic Clock Flying around Earth	61
2. 3. 3	Coordinate Length and Proper Length	62
2. 3. 4	The Observables in Gravitational Field	64
2. 3. 5	Measurement of Time and Space in Gravitational Field ...	67
2. 3. 6	Measurement of Light Propagation	69
2. 4	Motion Equation and Effect in Gravitational Field	71
2. 4. 1	Geodesics Equation in Curved Spacetime	71
2. 4. 2	Free Particle's Motion Equation and Newtonian Approximate	73
2. 4. 3	Particle's Orbit and Precession Effect in Schwarzschild Field	74
2. 4. 4	Photon's Orbit and Curve Effect in Schwarzschild Field	77
2. 4. 5	Gravitational Time Relay of Light	81
2. 4. 6	Gravitational and Doppler Frequency Shift of Light	82
	References	87

Chapter 3 Post-Newtonian Gravitational Theory 88

3. 1	Post-Newtonian Approximation of Gravitational Field	88
3. 1. 1	The Series Statement of Metric and Connection	88
3. 1. 2	Post-Newtonian Field Equation and Metric	91
3. 1. 3	Field Equation and Metric in DSX System	93
3. 1. 4	Scalar and Vector Potential around Star in the Solar	

System	95
3. 1. 5 Post-Newtonian Motion Equation of Particle and Photon	98
3. 2 Time and Space of Post-Newtonian Theory	100
3. 2. 1 Barycentric and Geocentric Celestial Reference System	101
3. 2. 2 Spacetime Transformation Between BCRS and GCRS	103
3. 2. 3 Metric and Barycentric Coordinate Time in BCRS	107
3. 2. 4 Metric and Geocentric Coordinate Time in GCRS	110
3. 2. 5 Metric and Terrestrial Time in TRS	112
3. 2. 6 Relativistic Time Scale and Interrelation	114
3. 3 Post-Newtonian Correction of Photon's Orbit and Transit Time	116
3. 3. 1 1PN Equation of Orbit and Curve Effect	116
3. 3. 2 2PN Equation of Orbit and Curve Effect	117
3. 3. 3 2PN Gravitational Time Relay of Light	120
3. 3. 4 Sagnac Effect of Transit Time of Light in TRS	123
3. 4 Post-Newtonian Correction of Satellite's Orbit	125
3. 4. 1 Classical Equation of Satellite's Undisturbed Orbit	125
3. 4. 2 Satellite's Moving State and Its Measurement	127
3. 4. 3 Classical Equation of Satellite's Perturbed Orbit	130
3. 4. 4 1PN Equation of Satellite's Orbit in GCRS	132
3. 4. 5 2PN Correction of Satellite's Orbit in GCRS	135
3. 4. 6 2PN Correction of Satellite's Orbit in BCRS	137
References	140
Chapter 4 Relativistic Effect of Satellite Navigation	142
4. 1 Basis Measurement Principle of Satellite Navigation	142
4. 1. 1 Introduction to Satellite Navigation System	142
4. 1. 2 Principle of Navigation and Invariance of Light Speed	145
4. 1. 3 Relativistic Effects of Satellite Navigation	146
4. 2 Relativistic Correction to Satellite's Clock	149
4. 2. 1 Time and Space System of Satellite Navigation	149

4. 2. 2	Synchronization with Satellite's Clock and Standard Clock	151
4. 2. 3	Clock Difference by Satellite's Ellipse Orbit	153
4. 2. 4	On Relativistic Difference of Clock	155
4. 3	Pseudo-range and Carrier-wave Phase Measurement Equation	157
4. 3. 1	Pseudo-range Measurement Equation	157
4. 3. 2	Relativistic Difference of Clock Between Satellite and Receiver	158
4. 3. 3	Relativistic Meaning of the Range Between Satellite and Receiver	159
4. 3. 4	Gravitational Effect on Carrier-wave Phase Equation	162
4. 3. 5	Gravitational Effect on Doppler Count Equation	164
	References	167
Chapter 5	Relativistic Model of X-ray Pulsar-based Navigation	168
5. 1	Introduction to X-ray Pulsar-based Navigation	168
5. 1. 1	Stars-based Celestial Autonomous Navigation	169
5. 1. 2	X-ray Pulsar-based Autonomous Navigation	171
5. 1. 3	Observational Property of X-ray Pulsar	173
5. 1. 4	Navigation Parameter of X-ray Pulsar	176
5. 2	Time Measurement of XNAV	179
5. 2. 1	Time Equation of Light Propagation in BCRS	180
5. 2. 2	Measurement Equation based on SSB	182
5. 2. 3	Measurement Equation based on Effective SSB	184
5. 2. 4	Transformation Between Spacecraft's Proper Time and TT	186
5. 3	Absolute Positioning Method in BCRS	188
5. 3. 1	Measurement Equation of Doppler Velocity	188
5. 3. 2	Unite Measurement Equation of Displacement and Velocity	190
5. 3. 3	Folding Observation Profile and Estimation of Frequency Deviation	192
5. 3. 4	Estimation of Time Relay Between Observation and Standard Profile	195

5.3.5	Navigation of Satellite at Halo Orbit around Libration Point in the Sun-Earth System	198
5.4	Relative Positioning Method in GCRS	203
5.4.1	Unite Measurement Equation based on Earth's Centre ...	204
5.4.2	Relative Positioning Method in GCRS	205
5.4.3	Relative Positioning Method based on Geostationary Satellite	207
	References	210
Chapter 6	Relativistic Positioning System and Application Trend	213
6.1	Classical Principle of Relativistic Positioning System	213
6.1.1	Orthogonal Frame and Null Frame	213
6.1.2	Emitter's Proper Time and Light Coordinates	216
6.1.3	Relation Between of Null Frame and Observer	218
6.2	Relativistic Positioning Method of XNAV	222
6.2.1	Relativistic Positioning Method in 2D Flat Spacetime	222
6.2.2	Relativistic Positioning Method in 4D Curve Spacetime	224
6.2.3	Comparison Between RPS and TOA Positioning Method	226
	References	229
Chapter 7	Relativistic Effect of Inertial Navigation in Space	230
7.1	Basis Principle of Inertial Navigation System	230
7.1.1	Introduction to Inertial Navigation	230
7.1.2	Basic Concepts of Inertial Navigation	231
7.1.3	Equation of Special Force in TRS and GCRS	232
7.2	Relativistic Effect on Accelerometer	234
7.2.1	Inertial Motion of Spacecraft—Geodesics Equation	234
7.2.2	Tidal Force in Spacecraft—Geodesic Deviation Equation	236
7.2.3	Accelerometer Combination for Offsetting Tidal Force	239
7.3	Relativistic Effect on Gyroscope in Space	242

7.3.1	Classical Measurement Principle of Gyroscope	242
7.3.2	Parallel Translation of Vector in Curved Spacetime	244
7.3.3	Geodetic Precession of Gyroscope in Space	247
7.3.4	Lense-Thirring Precession of Gyroscope in Space	248
7.3.5	Experimental Testing Geodetic and Lense-Thirring Precession	251
	References	252
Table of Astronomical Constants		254

第 1 章 狭义相对论基础

1.1 狭义相对论基本原理

狭义相对论是现代科学技术的基本理论,也是广义相对论的基础。从应用的角度来看,闵可夫斯基 4 维时空对于分析运动规律提供了相当完美的几何手段。我们假设读者对狭义相对论有初步了解,在简要叙述基本原理的基础上,重点讨论在 4 维时空中的分析方法。

1.1.1 基本原理和时空间隔不变性

1905 年,爱因斯坦在《论运动物体的电动力学》一文中首次提出了著名论断:“在力学方程成立的一切坐标系中,对于电动力学和光学的定律都同样适用,我们要把这个猜想提升为公设……并且还要引入另一条在表面上看来同它不相容的公设:光在空虚空间里总是以一确定的速度传播着,这速度同发射体的运动状态无关。”概括为下述两条原理:

(1) 狭义相对性原理:任何真实的物理规律在所有惯性系中应形式不变,或者说一切惯性系都是平权的、不可分辨的。可以看出,狭义相对性原理是伽利略相对性原理的推广,实质上是肯定了在所有惯性系中,不仅仅是力学规律而是所有的物理规律的绝对性,否定了宇宙中存在着一个优越的所谓绝对静止的原始惯性系。虽然如此,它却肯定了宇宙中应当存在着一群优越的坐标系,即全部惯性系。只有以后发展起来的广义相对论才彻底否定了任何坐标系的优越性,从而在任何坐标系中肯定了物理规律的绝对性,但是这时却需要考虑引力场的作用。

(2) 光速不变原理:任意一个惯性系中的观测者所测得的真空中光速恒为 c 。这条原理来源于麦克斯韦电动力学在一切惯性系中的形式不变性,即肯定了麦克斯韦电动力学的正确性和绝对性。因为真空中电磁波的传播速度只有一个唯一的速度 c ,地球上测得的值只能是这个自然界中普适的常数。在客观世界中不存在什么低速近似下的电磁波理论,需要修改的不是麦克斯韦电动力学而是牛顿力学,人们经常接触的力学现象是远小于光速的速度,由此总结出来的力学规律也就是在低速形式下的力学规律,所以在高速情况下必须修改它。

有两点必须指出:(1) 狭义相对性原理和光速不变原理是互相独立的;

(2) 这两条原理在狭义相对论中是作为公理提出来的,它们不能为逻辑所证明,只能由实验来验证。迄今为止,所有的实验都是支持这两条原理。狭义相对论就是在这两条原理的基础上建立起来的。

我们来看狭义相对论基本原理的数学意义。定义一个重要概念——事件:它是指在 t 时刻、 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 处发生某件事,一般将时间和空间坐标合在一起表示为 $P(t, \mathbf{r})$ 或 $P(t, x, y, z)$ 。事实上,这个概念是从我们生活中使用的同一名词提炼出来的,我们说某月某日在某地发生一起“事件”,就必须指出它的时间和地点。

对于任意的两个事件 $P(t, \mathbf{r})$ 和 $Q(t + dt, \mathbf{r} + d\mathbf{r})$, 其时间间隔和空间间隔分别为 dt 和 $|d\mathbf{r}|$ 。根据绝对时空观,这两个间隔是绝对的,与观测者的运动状态无关。但在相对论中,空间和时间是相互关联的,我们构造两个事件的时间间隔 dt 与空间间隔 $|d\mathbf{r}|$ 的平方差

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} \quad (1.1.1)$$

称作时空间隔或间隔,它是相对论中非常重要的物理量。我们之所以强调事件和时空间隔的概念,是因为它们将时间和空间联系成一个整体。在本质上讲,这两个概念是从经典物理到相对论时空理论的重要转折!

下面我们根据爱因斯坦的两条基本原理来证明:在相互作用匀速运动的两个惯性系 S 和 S' 中,测量两事件的时间间隔和空间间隔一般不相同,而时空间隔却相同,即 $ds^2 = ds'^2$,这与经典时空观是完全不相同的。

设事件 $P(t, \mathbf{r})$ 和 $Q(t + dt, \mathbf{r} + d\mathbf{r})$ 分别是发出和接收光信号,光传播时间和位移分别是 dt 和 $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$ 。按照光速不变原理,光在惯性系 S 和 S' 中的时空间隔均为

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 dt^2 - d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = 0 \\ ds'^2 &= c^2 dt'^2 - d\mathbf{r}' \cdot d\mathbf{r}' = 0 \end{aligned}$$

即光速不变原理应保证

$$ds = 0 \Leftrightarrow ds' = 0 \quad (1.1.2)$$

因此任意两事件在惯性系 S 和 S' 中的时空间隔之间应当有如下形式的一般关系

$$ds'^2 = k(v) (ds^2)^{\lambda(v)}$$

其中, $k(v)$ 、 $\lambda(v)$ 是两个惯性系的相对速度 v 的函数。只有这才能保证光信号的间隔同时为 0。

再由狭义相对性原理,惯性系 S 和 S' 应该是平权的,相对于 S 作匀速直线运动的物体,相对于 S' 亦应作匀速直线运动。我们知道保持匀速直线运动方程形式不变的变换只能是线性变换,而线性变换要求指数函数 $\lambda(v) = 1$, 所以有

$$ds'^2 = k(v) ds^2$$

由于 S 和 S' 是平权的, 交换 S 和 S' 后应有

$$ds^2 = k(v) ds'^2$$

由上两式可知 $k(v) = \pm 1$, 取负值将违反因果律, 故 $k(v) = 1$ 。因此两个间隔的关系为

$$ds^2 = ds'^2 = \text{inv. (不变量)} \quad (1.1.3)$$

此即时空间隔不变性或间隔不变性: 任意两事件的时空间隔是一个与惯性系无关的不变量。

间隔不变性是爱因斯坦两个基本原理的数学表述, 是狭义相对论的核心! 第2章将看到, 在广义相对论中的间隔不变性推广为: 任意两事件的时空间隔是一个与参考系无关的不变量, 但是时空间隔的形式不同于式(1.1.1)。

1.1.2 固有洛伦兹变换和时空观

根据时空间隔不变性以及时空变换的线性要求, 可以求出惯性系之间的时空变换即洛伦兹(Lorentz)变换。

如图 1.1.1 所示, 设惯性系 S' 相对于 S 沿任意方向以速度 \mathbf{v} 运动, 定义

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c} \quad (1.1.4)$$

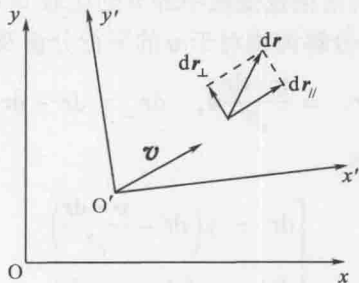


图 1.1.1 惯性系 $\{x, y\}$ 和 $\{x', y'\}$ 及其相对运动

可以证明: 任意两事件 $P(t, \mathbf{r})$ 和 $Q(t + dt, \mathbf{r} + d\mathbf{r})$ 在 S 和 S' 中的时间和空间间隔 $(dt, d\mathbf{r})$ 与 $(dt', d\mathbf{r}')$, 满足下面的固有洛伦兹变换

$$\begin{cases} dt' = \gamma \left(dt - \frac{\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}}{c^2} \right) \\ d\mathbf{r}' = d\mathbf{r} + \mathbf{v} \left[(\gamma - 1) \frac{\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}}{v^2} - \gamma dt \right] \end{cases} \quad (1.1.5)$$

不难验证, 固有洛伦兹变换式满足间隔不变性

$$c^2 dt'^2 - d\mathbf{r}' \cdot d\mathbf{r}' = c^2 dt^2 - d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$$

定义物体在 S 和 S' 中的速度分别为

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \mathbf{u}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt'}$$

则固有洛伦兹速度变换为

$$\mathbf{u}' = \frac{1}{1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}/c^2} \left[\frac{\mathbf{u}}{\gamma} + \frac{\gamma}{\gamma + 1} \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}}{c^2} - \mathbf{v} \right] \quad (1.1.6)$$

以上的固有洛伦兹变换具有普遍意义,表现为:(1) 参考系 S 和 S' 的坐标轴不一定对应平行;(2) 两个坐标系的原点在任意时刻不一定重合;(3) 参考系的相对速度不一定沿坐标轴方向。另外,由于上面的表达式是对无穷小时间和空间间隔的变换 $(dt, d\mathbf{r}) \leftrightarrow (dt', d\mathbf{r}')$, 不仅适用于惯性系,对瞬时惯性系也成立。

瞬时惯性系是对某一特定的研究对象(例如运动粒子)而言。如果粒子相对于某一惯性系 S 作加速运动,而惯性系不能具有加速度,所以瞬时惯性系只是在某一瞬时随着粒子一起运动,在不同时刻的瞬时惯性系不同——这就是“瞬时”的意思。也可以这样理解:在粒子的运动轨道上存在许多惯性系,其速度等于粒子在某时刻的瞬时速度 $\mathbf{v}(t)$, 粒子在不同时刻处于不同的惯性系中。例如,一艘飞船相对于地面作加速运动,其速度 $\mathbf{v}(t)$ 是变化的。在 t_0 时刻,飞船系 (S') 上测量的 $(dt', d\mathbf{r}')$ 与地面系 (S) 测量的 $(dt, d\mathbf{r})$ 仍然满足上面的变换,式中 \mathbf{v} 是指 $\mathbf{v}(t_0)$, 在 t_1 时刻的洛伦兹变换中的 \mathbf{v} 则应取 $\mathbf{v}(t_1)$ 。

将式(1.1.5)中位移分解为相对于 \mathbf{v} 的平行分量及垂直分量

$$d\mathbf{r}_{//} = \frac{\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}}{v^2} \mathbf{v}, \quad d\mathbf{r}_{\perp} = d\mathbf{r} - d\mathbf{r}_{//} \quad (1.1.7)$$

则固有洛伦兹变换可写成

$$\begin{cases} dt' = \gamma \left(dt - \frac{\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}}{c^2} \right) \\ d\mathbf{r}'_{//} = \gamma (d\mathbf{r}_{//} - \mathbf{v} dt) \\ d\mathbf{r}'_{\perp} = d\mathbf{r}_{\perp} \end{cases} \quad (1.1.8)$$

为方便起见,常设惯性系 S 和 S' 的空间坐标轴 $\{x, y, z\}$ 和 $\{x', y', z'\}$ 对应平行(不要求 $t=0$ 时原点重合), S' 相对于 S 沿 $x(x')$ 轴正向以速度 $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$ 运动,则上式变成我们惯用的洛伦兹变换

$$\begin{cases} dt' = \gamma \left(dt - \frac{v dx}{c^2} \right) \\ dx' = \gamma (dx - v dt) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \end{cases} \quad (1.1.9)$$

洛伦兹速度变换则为

$$\begin{cases} u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}/c^2} \\ u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}/c^2)} \\ u'_z = \frac{u_z}{\gamma(1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}/c^2)} \end{cases} \quad (1.1.10)$$

在上两式中作替换 $\mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v}$, 可得到洛伦兹逆变换和洛伦兹速度逆变换。

狭义相对论彻底改变了人们的时空观念, 为了清楚地理解狭义相对论时空观, 有必要分清固有时间与坐标时间、固有长度与坐标长度的区别。

固有时间, 是指相对于时钟静止的观测者记录的时间, 而固有长度是相对于物体静止的观测者测量物体的长度。可以设想某一坐标系中的每一点放置一个时钟(坐标钟), 在该系中它们保持相同的示数且严格同步。如果两事件在坐标系的不同地点发生, 两个坐标钟记录的时间差就是坐标时间。如果在该坐标系中同时记录两事件发生的空间坐标, 其差值就是坐标长度。顾名思义, 坐标量与坐标系有关, 而固有量是与坐标系无关的不变量。

下面根据洛伦兹变换式(1.1.9), 分析固有时与坐标时以及固有长度与坐标长度的关系。

设两事件 $P(t, \mathbf{r})$ 和 $Q(t + dt, \mathbf{r} + d\mathbf{r})$ 在 S' 中不同地点同时发生 ($dt' = 0$, $dx' \neq 0$), 在 S 中这两事件不是同时的, 由式(1.1.9)可知时间差为

$$dt = \gamma \frac{v dx'}{c^2} \neq 0 \quad (dt' = 0) \quad (1.1.11)$$

这叫同时的相对性, 即在某一惯性系中不同地点同时发生的事件在其他系中不是同时的。

如果两事件在惯性系 S' 中是在同一地点发生的 ($dx' = 0$), 在此系中的时间是固有时间 ($dt' = d\tau$), 而在其他系 S 中是不同地点发生的 ($dx \neq 0$), 对应的坐标时间为

$$dt = \gamma d\tau > d\tau \quad (dt' = d\tau, dx' = 0) \quad (1.1.12)$$

此式称作时间膨胀或时间延缓, 即两事件的坐标时间间隔必定大于固有时间间隔。

如果两事件在某一惯性系 S' 中不同地点同时发生 ($dt' = 0$), 或者同时测量运动物体的两端, 则这段距离是坐标长度 ($dx' = dl$), 在 S 中测量的距离是固有长度 ($dx = dl_0$), 二者的关系是

$$dl = dl_0/\gamma < dl_0 \quad (dx = dl_0, dt' = 0) \quad (1.1.13)$$

此即长度收缩公式,相对于物体运动的观测者测量物体的长度必定小于固有长度。注意,这个长度收缩是对相对运动方向的长度,在垂直运动上的分量的长度不变。对于无穷小体积,相对于它运动的观测者测量的体积 $dV = dl dy' dz'$ 与静止观测者测量的固有体积 $dV_0 = dl_0 dy dz$ 的关系是

$$dV = dV_0 / \gamma < dV_0 \quad (1.1.14)$$

例如,一艘飞船(S')相对于地面(S)作匀速直线运动,在飞船上观测两端同时发生的两个闪光,在地面看来不是同时发生的,而是船尾先发光船头后发光;在飞船上一个固定点的时钟记录的两个时间间隔是固有时,地面上测量的这个时间大于固有时间;在飞船上测量飞船的长度和体积是固有长度和固有体积,在地面上同时测量飞船两端的长度和体积小于固有长度和体积。

有两点应该说明:(1) 上面的3个基本效应并非独立现象,而是相互关联的,例如可以通过时间膨胀导出长度收缩,或者反过来。(2) 不仅同时性是相对的,时间膨胀和长度收缩效应也是相对的,因为坐标时间和坐标长度依赖于观测者相对于被测物体的运动状态,而固有时间和固有长度是绝对的。

1.1.3 因果律和光速极值原理

我们进一步讨论时空间隔的物理含义。时空间隔式(1.1.1)可以变形为

$$ds^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right), \quad (u = \frac{dr}{dt}) \quad (1.1.15)$$

其中, u 是两事件的空间间隔与时间间隔的比值,可以表示某种速度,取决于两个事件的相互关系。

任意两个事件总可以分为因果事件和非因果事件。因果事件是指两事件之间本来就存在某种因果联系(例如炮弹的发射和爆炸,光的发射和接收),或者此二事件之间虽然本来没有因果联系但却可以人为地建立某种联系(例如建立某种信号联系)。非因果事件是指二事件之间本来就没有因果联系(例如炮弹甲的发射和炮弹乙的爆炸),而且也不可能在它们之间人为地建立某种因果联系。

因果律告诉我们:存在因果关系的两个事件中,作为原因的事件必定早于作为结果的事件,这种时间上的先后关系是不能颠倒的,对任意观测者都是“因”在前“果”在后。所以因果事件之间的时序不允许颠倒,因而是绝对的;而非因果事件对的时序是相对的,是可以颠倒的。

欲使两个事件的时序颠倒,例如 $dt > 0, dt' < 0$, 根据洛伦兹时间变换

$$dt' = \gamma \left(dt - \frac{\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}}{c^2} \right) = \gamma dt \left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{c^2} \right) \quad (1.1.16)$$

则 u 和 v 两者之中至少应有一个大于真空中的光速 c 。假如承认信号速度(群

速、能流速度)可能大于真空中光速,则两事件恒可以用信号来联系,可以把 u 看作某种信号的速度。这样一来,任意两个虽无因果联系的事件,总可以用信号加以联系,而把它们看作因果事件对。又如果允许 S' 系对 S 系的速度大于光速,则 S 系的一切因果事件对的时序(特别是那些本来就存在因果关系的事件对)总是可以颠倒的:结果在前,原因在后。这就混淆了因果事件对和非因果事件对的原则界限,违背了因果律!在人类已有的观念中,因果律是绝对的,我们不允许哪一种理论包括相对论在内破坏因果律。因此只能假定任何信号速度以及物体运动速度都不可能大于真空中的光速,即

$$v \leq c \quad (1.1.17)$$

此即著名的光速极值原理,真空中的光速也称作极限信号速度。

这样,狭义相对论从因果律出发,第一次定量地研究了事件对的时序问题。最后归结为 u 和光速 c 的比较,有 3 种可能:

(1) $u > c$ 表示两事件之间不可能用信号来联系,它们属于非因果事件对。由式(1.1.15),这类事件的时空间隔 ds 是虚数, $ds^2 < 0$, 称作类空间隔,这类事件又叫做类空事件。从式(1.1.16)可以得到,适当选择一个惯性系,使得相对速度满足 $c > v > c^2/u$, 总可以通过洛伦兹变换把上述类空的非因果事件对的时序颠倒过来,类空间隔中的 u 不代表信号的传播速度。

(2) $u < c$ 表示两事件恒可以用信号联系,其间隔是实数, $ds^2 > 0$, 称作类时间隔,这类事件对叫类时事件,类时间隔中的 u 可以是某种信号传播速度。

(3) $u = c$ 表示两事件之间是用光信号联系的,其间隔为零, $ds^2 = 0$, 称作类光间隔或零间隔,这类事件叫类光事件。

归纳起来,可将两事件的间隔分成 3 类:

$$ds^2 \begin{cases} < 0 \\ > 0 \\ = 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad u \begin{cases} > c \text{ 类空} \\ < c \text{ 类时} \\ = c \text{ 类光} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{非因果} \\ \text{因果} \end{matrix} \quad (1.1.18)$$

根据间隔不变性,上述分类是绝对的,与惯性系无关。如果在惯性系 S 中属于类时(空、光)间隔,则在其他惯性系 S' 中也必然是类时(空、光)间隔。

真空中光速为一切信号速度的上限,乃是因果律对狭义相对论的限制。或者说,光速的极限性并不是仅由相对论得出的,它是相对论与因果律结合产生的必然结论。如果我们承认光速不变原理,又要保证不违因果律,则自然界必定存在一个极限速度 c 。科学家一直认为,因果律是自然界中任何现象都不可能违反的普遍规律。事实上,科学家的任务就是探索自然现象之所以如此的原因,探索“上帝”的秘密,因此我们必须首先承认结果是有因可究、有规可循的,否则也就无所谓科学了。

反过来说,正是因为光速极值原理才保证了因果的绝对性。而在经典力学

中不存在极限速度,信号的传播可以是无穷大,反而导致因果律的破缺。例如,在 A 处的电灯点亮后照亮了物体 B,因光速的有限性,A 处亮灯在前(因),B 被照亮在后(果)。如果光速是无穷大,则两事件同时发生,也就不存在因果关系了。

光速极限原理是指对于任意一个惯性观测者,测量任意物体的运动速度和任意信号的传播速度不能超过真空中的光速,并不是指任意的速度都不能超光速。特别是对于波的传播,光速极限原理是指波的群速度不能超光速,其相速度是可以超过光速的。因为相速度是波在传播过程中等相位点(波阵面)的移动速度,并不代表信号的传播。例如量子理论中的德布罗意波的相速度 u_p 就大于光速,而群速度即粒子运动速度 $u_g = u$ 小于光速,二者的关系是 $u_p u_g = c^2$ 。再例如,拿一根杆在灯光下移动,杆端的影子在地面移动的速度就有可能超过光速,这个速度可以看成是一种相速度而并非能量传播速度。

1.2 4 维闵可夫斯基空间

1908 年,闵可夫斯基发表了著名的《空间和时间》一文,提出把时间也作为 1 维坐标,与 3 维空间处于同等地位。一个现象或事件必须同时用时间和空间位置来说明,即对应一组数 (ct, x, y, z) ,取时间参量为 ct 的目的是使它和 x 具有相同的量纲,因而可以取统一的长度单位。将 1 维时间坐标记作 $x^0 = ct$,当空间坐标取直角坐标时记 $(x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$,由全体数组的集合

$$\{x^\mu | \mu = 0, 1, 2, 3\} = \{ct, x^i | i = 1, 2, 3\}$$

构成的 4 维时间-空间连续域,就是 4 维闵可夫斯基时空,以下简称闵氏空间。

引入 4 维闵氏空间,赋予现实的物理时空以几何图像,可以大大简化相对论的数学表述,加深对相对论的理解。同时也为我们从狭义相对论过渡到广义相对论打下坚实的几何基础。

为叙述方便,以后引入两个约定:

(1) 物理和几何分量的上下指标中的拉丁和希腊字母的取值范围分别为

$$i, j, k, l, \dots = 1, 2, 3, \quad \mu, \nu, \alpha, \beta, \dots = 0, 1, 2, 3$$

(2) 表达式中一个上指标和一个下指标相同时,表示对该指标求和并省略求和号,例如

$$A_i B^i = \sum_{i=1}^3 A_i B^i, \quad A_{\mu\nu} B^{\mu\nu} = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 A_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$$

这个约定也称作爱因斯坦惯例,使得表述较为简单且不会产生歧义。

1.2.1 闵氏空间的几何结构

考虑 2 维闵氏空间 $\{ct, x\}$,如图 1.2.1(a) 所示。空间中任意一点 $P(ct, x)$

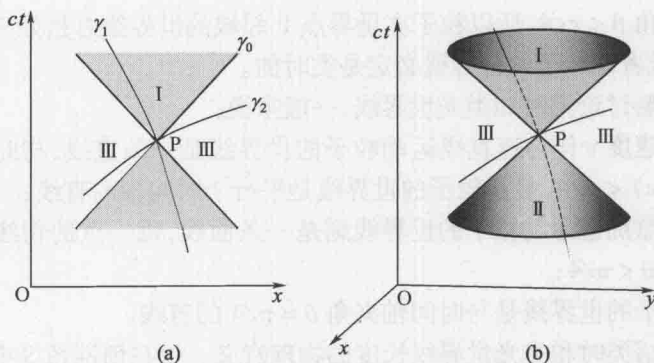


图 1.2.1 2 维(a)和 3 维(b)闵氏空间的光锥

表示一个事件,即 t 时刻 x 处发生的某件事,也称作世界点。任意两点 $P(ct, x)$ 和 $Q(ct + c\Delta t, x + \Delta x)$ 连线的“闵氏长度”表示两个事件的时空间隔

$$\Delta s = \sqrt{(c\Delta t)^2 - \Delta x^2}$$

显然,这个长度的度量与欧氏空间完全不同,它可以是实数,也可以是虚数或 0,取决于两个事件的关系,这也正是闵氏空间的特征。

如果上述两事件构成类光间隔, P 和 Q 分别表示发射或接收光波,则

$$\Delta s = 0 \quad \text{或} \quad c\Delta t = \pm \Delta x$$

这是斜率为 ± 1 的直线,由这两条线构成的锥形称为 P 点的光锥,分为过去光锥 ($\Delta t < 0$) 和未来光锥 ($\Delta t > 0$)。按照时空间隔的分类,光锥把时空分成 3 部分:

- (1) 光锥内部的点与 P 构成类时间隔 $\Delta s > 0$ (图中阴影区域 I, II);
- (2) 光锥外部属于类空间隔 $\Delta s < 0$ (图中区域 III);
- (3) 光锥本身属于类光间隔 $\Delta s = 0$ 。

对于 3 维闵氏空间,光锥构成一个不变的 2 维锥面(图 1.2.1(b)); 4 维空间的光锥则是一个不变的 3 维超锥面

$$c\Delta t = \pm \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

“不变”是指光锥与坐标变换无关。

闵氏空间中的任意一条曲线称作世界线,它也分成 3 类:在所有经过 P 的世界线中

- (1) 如果处于 P 点的光锥上,称作类光世界线(如图 1.2.1 中 γ_0);
- (2) 如果处于光锥内部,称作类时世界线(如 γ_1);
- (3) 如果处于光锥外部,称作类空世界线(如 γ_2)。

类空世界线上的点之间没有因果关系;类光世界线反映光子的运动;类时世界线可以反映实物粒子的运动轨迹。这是因为粒子的世界线由一系列因果事件连接而成,因此粒子的世界线的斜率要受光速极值原理的限制,结果是世界线与

时间轴的夹角 $\theta < \pi/4$, 所以粒子在世界点 P 邻域的世界线总是处于 P 为顶点的光锥之内, 或者说粒子的世界线必定是类时的。

下面主要讨论类时和类光世界线, 一般来说:

(1) 以速度 v 作匀速直线运动粒子的世界线是一条直线, 与时间轴的夹角为 $\arctan(v/c) < \pi/4$, 静止粒子的世界线是平行于时间轴的直线;

(2) 任意加速运动粒子的世界线则是一条曲线, 每一点的切线与时间轴的夹角也要求 $\theta < \pi/4$;

(3) 光子的世界线是与时间轴夹角 $\theta = \pi/4$ 的直线。

下面介绍类时和类光世界线长度的物理意义。设在惯性系 S 中有一个运动速度为 $v(t)$ 的粒子, 在相邻无穷小的两个世界点 $P(x^\mu)$ 和 $Q(x^\mu + dx^\mu)$ 的类时世界线长度为 ds 。引入一个相对于粒子瞬时静止的瞬时惯性系 S' , 则 $v' = 0$, 在此系中测量的时间是固有时 ($dt' = d\tau$)。根据间隔不变性

$$ds^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = c^2 dt'^2 \left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right) = c^2 d\tau^2$$

$$d\tau = \frac{ds}{c} = dt \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} \quad (1.2.1)$$

这就是粒子世界线长度 ds 的物理意义, 它实际上表示运动粒子的固有时间 $d\tau$ 。

如果两个世界点不是相距无穷小, 设为 $P(x^\mu)$ 和 $Q(x^\mu + \Delta x^\mu)$ 。可以把世界线 PQ 的长度 Δs 分成许多小段, 并用每段的弦来代替相应的弧, 第 i 个弧线的弦长为 Δs_i , 把各段相加就有

$$\Delta s = \sum_i \Delta s_i$$

因为每一段弦线代表一个惯性运动, 粒子在这一系列瞬时惯性系中都是静止的。对于第 i 个瞬时惯性系而言, $\Delta s_i/c$ 即为运动粒子在第 i 个惯性系的固有时间。对于作任意运动的粒子而言, 它的世界线的长度除以 c , 就是这些瞬时惯性系中所记录的固有时间

$$\Delta\tau = \frac{\Delta s}{c} = \int_{P_0}^P dt \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} \quad (1.2.2)$$

如果粒子相对于 S 系作匀速直线运动, 速度 v 不变, 则固连在粒子上的 S' 系显然是惯性系, 这时两事件 P 和 Q 的固有时为

$$\Delta\tau = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (v = \text{常数}) \quad (1.2.3)$$

这就是 1.1.3 节给出的时间膨胀公式。

总之, 代表粒子运动的类时世界线具有明确的物理意义, 它的弧长表示粒子

运动的固有时间。在 1.3.1 节将证明,世界线的切线表示粒子的 4 维速度。显然,光子世界线的弧长也表示光子的固有时但恒为 0!

1.2.2 闵氏空间的度规和坐标变换

在几何学中,一个空间由它的度规或线元唯一确定。

在 3 维欧氏空间建立直角坐标系 $(x^i | i = 1, 2, 3) = (x, y, z)$, 坐标基矢为 (e_i) , 则位置矢量 $\mathbf{r} = x^i e_i$ 。任意一点 (x^i) 与相邻点 $(x^i + dx^i)$ 的欧氏长度 dl 称为欧氏线元(无穷小弧长)

$$dl^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \delta_{ij} dx^i dx^j \quad (1.2.4)$$

$$\delta_{ij} = e_i \cdot e_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.2.5)$$

式中: δ_{ij} 为直角坐标下的欧氏度规。

推广到 4 维闵氏空间 $\{x^\mu | \mu = 0, 1, 2, 3\}$, (e_μ) 是闵氏空间的坐标基矢, 其中的世界点 $P(x^\mu)$ 可以用位置矢量表示成

$$x = x^\mu e_\mu \quad (1.2.6)$$

相邻两个世界点 $P(x^\mu)$ 和 $Q(x^\mu + dx^\mu)$ 连线的时空间隔 ds 在几何上称作闵氏线元

$$ds^2 = \langle dx, dx \rangle = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.2.7)$$

$$\eta_{\mu\nu} = \langle e_\mu, e_\nu \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.2.8)$$

其中, \langle, \rangle 称作内积(缩并积), 是欧氏空间的点积的推广。矩阵 $\eta_{\mu\nu}$ 称作直角空间坐标下的协变闵氏度规, 逆矩阵 $\eta^{\mu\nu}$ 定义为逆变闵氏度规, 不难求出

$$\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \quad (1.2.9)$$

且满足正交归一性

$$\eta^{\mu\alpha} \eta_{\alpha\nu} = \delta_\nu^\mu = \begin{cases} 1 & (\mu = \nu) \\ 0 & (\mu \neq \nu) \end{cases} \quad (1.2.10)$$

可以看出, 闵氏度规虽然与欧氏度规类似, 但它不是正定的(特征值均为正), 故也将闵氏空间称作伪欧空间。

下面将洛伦兹变换表示成闵氏空间的坐标变换。

取惯性系 S 与 S' 的空间坐标轴对应平行且相对速度 \mathbf{v} 沿 $x(x')$ 轴正向, 则

闵氏空间的时空坐标如图 1.2.2 所示。这是因为 S' 系的时间轴表示相对于 S' 系静止粒子的世界线 ($x' = 0$)，那么它在 S 系就是速度为 v 的世界线 ($x = vt$)，与 S 系时间轴的夹角为 $\theta = \arctan(v/c)$ 。又因为在两系中的光锥保持不变

$$x = ct \Leftrightarrow x' = ct'$$

两系的时间和空间轴均应关于这条直线对称，故两系的空间轴夹角也为 θ 。

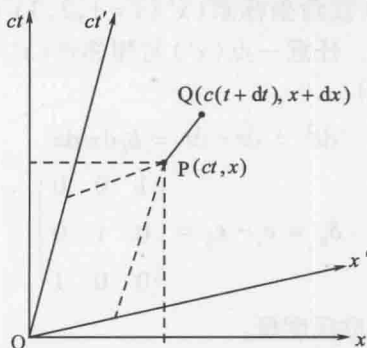


图 1.2.2 2 维闵氏空间的坐标变换

任意两个相邻世界点 (x^μ) 和 ($x^\mu + dx^\mu$) 的时空间隔在两个坐标系中的关系由洛伦兹变换式 (1.1.9) 给出：

$$\begin{cases} dx'^0 = \gamma(dx^0 - \beta dx^1) \\ dx'^1 = \gamma(dx^1 - \beta dx^0) \\ dx'^2 = dx^2 \\ dx'^3 = dx^3 \end{cases}$$

写成矩阵形式就是

$$dx'^\mu = L^\mu_\nu dx^\nu \quad (1.2.11)$$

$$L^\mu_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.2.12)$$

所以洛伦兹变换是闵氏空间的线性变换， L^μ_ν 称作洛伦兹变换系数。同理，洛伦兹逆变换表示为

$$dx^\mu = \hat{L}^\mu_\nu dx'^\nu \quad (1.2.13)$$

\hat{L} 是 L 的逆矩阵，在式 (1.2.12) 中替换 $v \rightarrow -v$ 即可得到逆变换系数

$$\hat{L}_\nu^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.2.14)$$

将式(1.2.12)和式(1.2.14)分别代入间隔不变性, $\eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$, 得到洛伦兹变换系数满足

$$\eta_{\mu\nu} L_\alpha^\mu L_\beta^\nu = \eta_{\mu\nu} \hat{L}_\alpha^\mu \hat{L}_\beta^\nu = \eta_{\alpha\beta} \quad (1.2.15)$$

利用式(1.2.10), 可知式(1.2.15)表示正交归一性:

$$L_\alpha^\mu L_\nu^\alpha = \hat{L}_\alpha^\mu \hat{L}_\nu^\alpha = \delta_\nu^\mu \quad (1.2.16)$$

另外, 洛伦兹变换矩阵还具有么模性:

$$\det(L) = \det(\hat{L}) = 1 \quad (1.2.17)$$

故洛伦兹变换属于4维么模正交群或特殊正交群(Special Orthogonal Group), 记作SO(4)。

1.2.3 闵氏空间的张量分析

借助于上面的坐标变换, 简单介绍闵氏空间的标量(0阶张量)、矢量(1阶张量)和2阶张量及其变换规律。

1. 标量(0阶张量)

标量只有1个分量, 在洛伦兹变换下其值不变, 所以上面提及的不变量就是标量。例如真空中的光速 c 、时空间隔 ds 、粒子的固有时间 $d\tau$ 等都是闵氏空间的标量, 1.2.4节将要讨论的固有加速度 a_0 和物体的固有质量 m_0 等也是标量。

2. 矢量(1阶张量)

记4维闵氏空间的基矢量和共轭基矢量分别为 $(e_\mu | \mu=0, 1, 2, 3)$ 和 (e^μ) , 它们的关系满足下面的内积定义

$$\begin{cases} \langle e_\mu, e_\nu \rangle = \eta_{\mu\nu} \\ \langle e^\mu, e^\nu \rangle = \eta^{\mu\nu} \\ \langle e_\mu, e^\nu \rangle = \delta_\mu^\nu \end{cases} \quad (1.2.18)$$

内积的运算规律与欧氏空间的点积(标量积)完全相同, 即

$$\begin{cases} \langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle \\ \langle aX, bY \rangle = a \cdot b \langle X, Y \rangle \\ \langle X + Y, Z \rangle = \langle X, Z \rangle + \langle Y, Z \rangle \end{cases} \quad (1.2.19)$$

式中: X, Y, Z 和 a, b 分别为闵氏空间的矢量和标量。

闵氏空间的 4 维矢量记作

$$X = X^\mu e_\mu = X_\mu e^\mu \quad (1.2.20)$$

则矢量的内积表示 4 维矢量长度的平方(这里及以下的“矢量长度”是指闵氏长度而非欧氏长度)

$$\langle X, X \rangle = X^\mu X^\nu \langle e_\mu, e_\nu \rangle = \eta_{\mu\nu} X^\mu X^\nu \quad (1.2.21)$$

其中, X^μ 和 X_μ 为矢量在基矢量和共轭基矢量上的投影, 分别称作矢量的逆变和协变分量。逆变和协变分量通过度规张量相互转换, 即提升或下降指标

$$\begin{cases} X^\mu = \eta^{\mu\nu} X_\nu \\ X_\mu = \eta_{\mu\nu} X^\nu \end{cases} \quad (1.2.22)$$

例如, 在式(1.2.20)两边对 e_ν 做内积, 利用式(1.2.19)就可得到上面第 2 式:

$$\langle e_\mu, e_\nu \rangle X^\mu = \eta_{\mu\nu} X^\mu = X_\nu \langle e^\mu, e_\nu \rangle = X_\nu$$

矢量的变换规律与洛伦兹变换相同

$$\begin{cases} X'^\mu = L^\mu_\nu X^\nu \\ X^\mu = (\hat{L}^\mu_\nu) X'^\nu \end{cases} \quad (1.2.23)$$

此式也可以作为矢量的判别标准。利用洛伦兹变换规律式(1.2.16), 可证矢量的长度(内积)保持不变

$$\eta_{\mu\nu} X'^\mu X'^\nu = \eta_{\mu\nu} L^\mu_\alpha X^\alpha L^\nu_\beta X^\beta = \eta_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta \quad (1.2.24)$$

一个重要的协变矢量是 4 维微分算符, 它是 3 维空间梯度算符 ∇ 的推广

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{c \partial t}, \nabla \right)$$

因为它的变换满足协变矢量变换法则

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \hat{L}^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \quad (1.2.25)$$

它的闵氏长度是一个标量算符:

$$\eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \nabla^2 = \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \quad (1.2.26)$$

称为 4 维拉普拉斯算符, 是 3 维拉普拉斯算符 $\nabla^2 \equiv \nabla \cdot \nabla$ 的推广。

与欧氏空间矢量不同的是, 闵氏空间的矢量分为类光、类时和类空 3 类, 以矢量长度为判别标准:

$$\eta_{\mu\nu} X^\mu X^\nu \begin{cases} = 0 & (\text{类光或零矢量}) \\ > 0 & (\text{类时矢量}) \\ < 0 & (\text{类空矢量}) \end{cases} \quad (1.2.27)$$

它们分别位于光锥上、光锥内部和光锥外部。例如,下面将要讨论的4维速度和4维加速度分别是类时和类空矢量,而波矢量则是零矢量。注意有的文献取闵氏度规与式(1.2.8)不同,矩阵元差一个负号,相应地矢量分类与上式有区别。

3. 2 阶张量

在3维欧氏空间,2阶张量可写成并矢的形式。设3个坐标基矢为 $(\mathbf{e}_i | i = 1, 2, 3)$,则3维空间的2阶张量为

$$\vec{T} = T^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$$

$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ 是坐标基矢的并矢,共有 $3^2 = 9$ 个,在每个坐标并矢上的系数 T^{ij} 就是2阶张量的分量。

推广到在4维闵氏空间,则2阶张量记作

$$T = T^{\mu\nu} e_\mu e_\nu = T_{\mu\nu} e^\mu e^\nu \quad (1.2.28)$$

它有 $4^2 = 16$ 个分量,构成一个 4×4 方阵

$$T^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{bmatrix}$$

其中,右下角的9个分量 T^{ij} 属于3维欧氏空间中的张量。2阶张量的分量分为带有上指标的逆变分量(如 $\eta^{\mu\nu}$)和带有下指标的协变分量(如 $\eta_{\mu\nu}$),以及带有上下指标的混合张量(如 L_ν^μ)。张量类型的改变也就是上下指标的提升或下降,由度规张量与张量的缩并(对相同指标求和)来完成

$$\begin{cases} T^{\mu\nu} = \eta^{\alpha\gamma} \eta^{\nu\beta} T_{\alpha\beta} = \eta^{\mu\alpha} T_\alpha^\nu \\ T_{\mu\nu} = \eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} T^{\alpha\beta} = \eta_{\mu\alpha} T_\nu^\alpha \\ T_\nu^\mu = \eta_{\nu\alpha} T^{\mu\alpha} = \eta^{\mu\alpha} T_{\alpha\nu} \end{cases} \quad (1.2.29)$$

张量的变换规律分别是

$$\begin{cases} T'^{\mu\nu} = L_\alpha^\mu L_\beta^\nu T^{\alpha\beta}, & (T' = LTL^T) \\ T^{\mu\nu} = \hat{L}_\alpha^\mu \hat{L}_\beta^\nu T'^{\alpha\beta}, & (T = \hat{L}T'\hat{L}^T) \end{cases} \quad (1.2.30)$$

利用式(1.2.30)及洛伦兹变换的特性式(1.2.17)、式(1.2.18),可证张量的迹 $\text{tr}(T)$ 、行列式 $\det(T)$ 和内积(缩并积)为不变量:

$$\begin{cases} \text{tr}(T') = \text{tr}(LTL^T) = \text{tr}(TLL^T) = \text{tr}(T) \\ \det(T') = \det(L)\det(T)\det(L^T) = \det(T) \\ T'_{\mu\nu} T'^{\mu\nu} = L_\mu^\alpha L_\nu^\beta T_{\alpha\beta} L_\lambda^\mu L_\sigma^\nu T^{\lambda\sigma} = \delta_\lambda^\alpha \delta_\sigma^\beta T_{\alpha\beta} T^{\lambda\sigma} = T_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} \end{cases} \quad (1.2.31)$$

以上3个不变量对应于3维欧氏空间2阶张量 $T^{\bar{ij}}$ 的3个基本不变量。

以上结论可以推广到4维弯曲空间。在广义相对论中,4维弯曲空间的度规张量为 $g_{\mu\nu}(x)$,该空间的标量、矢量和2阶张量定义及其变换仍然满足本节的公式,只需将平直时空的闵氏度规换成弯曲时空的度规,洛伦兹变换替换成任意坐标变换:

$$\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}, \quad L_{\nu}^{\mu} \rightarrow \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}, \quad \hat{L}_{\nu}^{\mu} \rightarrow \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}}$$

于是得到,任意矢量的协变和逆变分量的转换

$$X_{\mu} = g_{\mu\nu} X^{\nu}, \quad X^{\mu} = g^{\mu\nu} X_{\nu} \quad (1.2.32)$$

在任意坐标变换 $x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu}$ 下,矢量的变换规律是

$$X'_{\mu} = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}} X_{\nu}, \quad X'^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} X^{\nu} \quad (1.2.33)$$

度规张量(2阶张量)的变换规律是

$$g'_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}}, \quad g'^{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} \quad (1.2.34)$$

利用上面两式,可证两个矢量的内积为不变量

$$g'_{\mu\nu} X'^{\mu} Y'^{\nu} = g_{\alpha\beta} X^{\alpha} Y^{\beta} \quad (1.2.35)$$

其余类推。

1.3 狭义相对论力学

1.3.1 4维位移、速度和加速度

在4维闵氏空间 $\{x^{\mu}\}$,任意两个相邻世界点 $P(x^{\mu})$ 和 $Q(x^{\mu} + dx^{\mu})$ 的时间和空间坐标差构成4维位移

$$dx^{\mu} = (dx^0, dx^1, dx^2, dx^3) \quad (1.3.1)$$

或者写成 $dx = dx^{\mu} e_{\mu}$ 。在洛伦兹变换下 $x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu}$,它的闵氏长度或者说它与自身的内积保持不变

$$\eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = \eta_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} = ds^2 \quad (1.3.2)$$

由于固有时间 $d\tau = ds/c$ 为不变量,用4维位移矢量和固有时间可以构造4维速度或闵氏速度

$$u^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dx^{\mu}}{dt} = \gamma(c, \mathbf{v}) \quad (1.3.3)$$

这里用到式(1.2.1), 即 $dt/d\tau = \gamma$, $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ 是通常的 3 维速度。4 维速度分量的变换与洛伦兹变换相同, 并保持长度不变

$$\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = \eta_{\mu\nu} u'^\mu u'^\nu = c^2 \quad (1.3.4)$$

故 4 维速度是类时矢量, 其几何意义是世界线的切线, 切线与坐标轴夹角的余弦表示该坐标分量, 与时间轴的夹角必定小于 $\pi/4$ 。

同理, 定义 4 维加速度为

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \quad (1.3.5)$$

因为在瞬时惯性系中, $\mathbf{v}=0$, $d\tau=dt$, 其 4 维加速度为

$$a_0^\mu = \left. \frac{dt}{d\tau} \frac{d}{dt} \left(\frac{dt}{d\tau} \frac{dx^\mu}{dt} \right) \right|_{v=0} = \left. \frac{d^2 x^\mu}{dt^2} \right|_{v=0} = (0, \mathbf{a}_0)$$

其中, $\mathbf{a}_0 = (d\mathbf{v}/dt)|_{v=0}$ 称作固有加速度, 它是指相对于物体静止的观测者测量的经典加速度。例如在航天器上搭载的加速度计测量自身的加速度就是固有加速度, 与地面观测者测量的加速度不同。因此, 4 维加速度的长度平方为

$$\eta_{\mu\nu} a^\mu a^\nu = \eta_{\mu\nu} a'^\mu a'^\nu = -a_0^2 \quad (1.3.6)$$

式(1.3.6)表明 4 维加速度是类空矢量, 事实上对式(1.3.4)微分

$$\eta_{\mu\nu} a^\mu u^\nu = \langle a, u \rangle = 0$$

这表示 4 维加速度与 4 维速度正交, 由于 4 维速度是类时矢量, 故 4 维加速度必定类空。

我们来分析直线运动的加速度变换规律。设物体运动 3 维速度和加速度分别是 $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$, $\mathbf{a} = a\mathbf{e}_x$, 则 4 维速度和加速度应为

$$u^\mu = (\gamma c, \gamma v, 0, 0)$$

$$a^\mu = \gamma \frac{du^\mu}{dt} = (\gamma^4 \beta a, (\gamma^2 + \gamma^4 \beta^2) a, 0, 0)$$

根据式(1.3.6)

$$(\gamma^4 \beta a)^2 - ((\gamma^2 + \gamma^4 \beta^2) a)^2 = -a_0^2$$

得到

$$a_0 = \gamma^3 a \left(a = \frac{d^2 x}{dt^2}, a_0 = \left. \frac{d^2 x'}{dt'^2} \right|_{v'=0} \right) \quad (1.3.7)$$

这就是直线运动的固有加速度与加速度的关系。

例如, 设高速飞船从静止开始作加速直线运动, 在飞船 S' 上搭载的加速度计测量自身的加速度(即固有加速度)为一常数 a_0 。在地面 S 测量飞船的加速度、速度和运动距离则分别为

$$a(t) = \frac{a_0}{\gamma^3} = a_0 \left(1 - \frac{v(t)^2}{c^2}\right)^{3/2}$$

$$v(t) = \int_0^t a(t) dt = \frac{a_0 t}{\sqrt{1 + (a_0 t/c)^2}}$$

$$x(t) = \int_0^t v(t) dt = \frac{c^2}{a_0} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{a_0 t}{c}\right)^2} - 1 \right)$$

当 $v \ll c$ 时,退化为经典力学的公式

$$a_N = a_0, \quad v_N = a_0 t, \quad x_N = \frac{1}{2} a_0 t^2$$

比较上面两组公式,相对论与经典力学的结论显然不同:虽然飞船上的观测者认为自己作匀加速直线运动($a_0 = \text{常数}$),但在地面系中观测,飞船是作变加速运动($a \neq \text{常数}$);速度必定小于 c 而不可能无限增大($v < c$);位移随时间的变化曲线不是抛物线而是双曲线

$$(x + b)^2 - (ct)^2 = b^2 \quad (b = c^2/a_0)$$

也就是说,作常值固有加速直线运动的质点,在 2 维闵氏空间 $\{t, x\}$ 中的世界线是双曲线。

1.3.2 4 维动量和运动方程

将牛顿力学修改为相对论力学规律,应满足两个条件:(1) 方程必须具有洛伦兹协变性,即在不同惯性系中方程的形式相同;(2) 当 $u \ll c$ 时方程退化为经典方程。

定义相对于物体静止的观测者测量物体的质量为固有质量或静止质量 m_0 ,它是一个标量。相对于物体以速度 \mathbf{v} 运动的观测者测量的质量则是

$$m = \gamma m_0 \quad (1.3.8)$$

固有质量与 4 维速度矢量的乘积构成 4 维动量或 4 维能动矢量

$$p^\mu = m_0 u^\mu = m(c, \mathbf{v}) = (E/c, \mathbf{p}) \quad (1.3.9)$$

最后一步定义了

$$\begin{cases} \mathbf{p} = m\mathbf{v} = \gamma m_0 \mathbf{v} \\ E = mc^2 = \gamma m_0 c^2 \end{cases} \quad (1.3.10)$$

因为经典物理是相对论的低速近似,当物体的运动速度 $v \ll c$ 时,相对论应该退化为经典力学。将式(1.3.10)中的 γ 作级数展开,两式分别化为

$$\mathbf{p} = m_0 \mathbf{v} \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \cdots \right) \approx m_0 \mathbf{v}$$

$$E = m_0 c^2 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \cdots \right) \approx m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2$$

第1式右边是经典力学的动量,第2式右边是经典力学的动能和一个常量之和。4维动量的空间分量 \mathbf{p} 表示3维相对论动量,时间分量中的 E 表示相对论能量,其中 $m_0 c^2$ 称作固有能量或静止能量,动能则为

$$E_k = E - E_0, \quad (E_0 = m_0 c^2) \quad (1.3.11)$$

这样,4维动量就把能量和动量统一在一起了。

根据矢量的变换规律,4维动量的变换为

$$p^\mu = L_\nu^\mu p^\nu \quad (1.3.12)$$

其分量变换与时空坐标变换的形式相同

$$\begin{cases} E' = \gamma(E - \mathbf{v} \cdot \mathbf{p}) \\ p'^1 = \gamma\left(p^1 - \frac{v}{c^2} E\right) \\ p'^2 = p^2 \\ p'^3 = p^3 \end{cases} \quad (1.3.13)$$

由于矢量的闵氏长度不变,有

$$\eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = \text{inv.}$$

在粒子的瞬时惯性系中, $E = m_0 c^2$, $\mathbf{p} = 0$,不变量就是 $m_0^2 c^2$,得到

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4 \quad (1.3.14)$$

假设能量不可能为负值,式(1.3.14)又可写成

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} \quad (1.3.15)$$

式(1.3.14)表示在不同惯性系中测量,粒子的能量和动量的平方差 $E^2 - p^2 c^2$ 为不变量,且为常量;式(1.3.15)是指在同一惯性系中测量的粒子能量和动量所满足的相互关系。这两式就是相对论粒子的能量动量关系式。

我们知道,在经典力学中的牛顿运动定律在洛伦兹变换下方程的形式要发生变化,不满足狭义相对性原理。应该将其修正成4维形式

$$F^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} = m_0 \frac{du^\mu}{d\tau} \quad (1.3.16)$$

这就是相对论运动方程, F^μ 称作4维力矢量,与普通3维力 \mathbf{F} 的关系是

$$F^\mu = \gamma(\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}/c, \mathbf{F}) \quad (1.3.17)$$

由于 $d\tau = dt/\gamma$,故运动方程的分量形式为

$$\begin{cases} \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) \\ \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(mc^2) \end{cases} \quad (1.3.18)$$

显然,当 $v \ll c$ 时上式分别退化为经典的牛顿定律和动能定律。

对于 N 个质点构成的质点系,每一个质点的 4 维动量为

$$p_n^\mu = (E_n/c, \mathbf{p}_n)$$

式中: $n=1, 2, \dots, N$ 为质点的标号。当体系不受外力作用时,根据运动方程式,其空间和时间分量分别为

$$\sum_{n=1}^N \mathbf{p}_n = 3 \text{ 维常矢量}, \quad \sum_{n=1}^N E_n = \text{常量} \quad (1.3.19)$$

这就是质点系的能量和动量守恒律。

1.3.3 高速火箭的 Ackeret 公式

下面以高速运动火箭为例,讨论一种特殊的质点系——变质量物体的守恒律。

设火箭的初始固有质量为 m_0 ,从静止开始作直线运动,速度为 v 时的固有质量为 m (本小节中固有质量不带下标“0”),向后喷射的气体相对于火箭的速度为 $-u$ (负号表示与火箭运动方向相反)。不考虑重力和空气阻力的影响,来求火箭的质量变化与运动速度的关系。

将火箭本体和喷射气体看成一个质点系。考虑一个无穷小过程:当火箭本体的速度变换 $v \rightarrow v + dv$ 时,固有质量变化是 $m \rightarrow m + dm$ ($dm < 0$),同时放出固有质量为 Δm 、相对于地面速度为 u ($u < 0$) 的气体。在此过程中质量并不守恒,而是能量和动量守恒

$$\begin{aligned} \frac{(m + dm)c^2}{\sqrt{1 - (v + dv)^2/c^2}} - \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{\Delta mc^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} &= 0 \\ \frac{(m + dm)(v + dv)}{\sqrt{1 - (v + dv)^2/c^2}} - \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{\Delta mu}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} &= 0 \end{aligned}$$

或者用微分表示为

$$\begin{cases} d(\gamma m) + \gamma_u \Delta m = 0 \\ d(\gamma mv) + \gamma_u \Delta mu = 0 \end{cases} \quad (1.3.20)$$

式中: $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$; $\gamma_u = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$ 。

将洛伦兹速度变换

$$u = \frac{v - u_r}{1 - u_r v / c^2}$$

代入上式后化简为

$$\frac{dm}{m} = - \frac{dv}{u_r (1 - v^2/c^2)}$$

从初态到末态积分, $m = m_0 \rightarrow m, v = 0 \rightarrow v$, 就得到

$$\eta \equiv \frac{m_0}{m} = \left(\frac{c + v}{c - v} \right)^{\frac{c}{2u_r}} \quad (1.3.21)$$

亦即

$$\frac{v}{c} = \frac{\eta^{\frac{2u_r}{c}} - 1}{\eta^{\frac{2u_r}{c}} + 1} \quad (1.3.22)$$

这就是火箭初末态质量比 η 与末态速度 v 及喷气速度 u_r 的关系, 火箭初末态质量比越大, 喷气速度越大, 获得的末速度也就越大。此式是瑞士科学家 Ackeret 在 1946 年首先得到的, 称为 Ackeret 公式。

对式(1.3.21)两边取对数后再作级数展开

$$\ln \eta = \frac{c}{2u_r} \ln \left(\frac{1 + v/c}{1 - v/c} \right) = \frac{v}{u_r} \left(1 + \frac{v^2}{3c^2} + \cdots \right)$$

在低速近似下 ($v \ll c$) 上式化为

$$\eta = \exp(v/u_r) \quad \text{或} \quad v = u_r \ln \eta \quad (1.3.23)$$

此即我们熟知的低速火箭的 Tsiolkovski 公式, 它是 Ackeret 公式的低速近似。不过, 由于现在火箭的速度并不大 (相对于光速), 即使达到第三宇宙速度 16.7 km/s, Ackeret 公式对 Tsiolkovski 公式的修正也是微不足道。对于设想中的“光子火箭”, 则必须应用 Ackeret 公式。

1.3.4 4 维能量动量张量

根据能量动量的洛伦兹变换式(1.3.13), 如果物体在某个惯性系中只有能量, 在另一惯性系中可能具有能量和动量。考虑到连续介质, 在相对于介质静止的惯性系中可能只有能量, 但在相对于它运动的惯性系中不仅有能量, 而且有动量、动量流和能量流。因此有必要将该能量和动量作为一个统一体综合考虑, 这就是本节将要讨论的 4 维能量动量张量。为明确起见, 我们首先讨论无相互作用的松散介质 (例如所谓“尘埃”), 它是一种特殊的质点系。然后将所得结论直接推广到任意的连续介质。

设连续介质固有体元 dV_0 中的固有质量为 dm_0 , 定义介质的固有质量密度:

$$\rho_0 = dm_0/dV_0$$

如果介质以速度 \mathbf{v} 运动,则 4 维矢量 $\rho_0 u^\mu$ 反映了单位体元的质量流动,称为 4 维质量流密度

$$J^\mu = \rho_0 u^\mu = \gamma \rho_0 (c, \mathbf{v}) \quad (1.3.24)$$

因为 4 维散度 $\partial_\mu J^\mu = \text{inv}$ 是一个不变量,而对瞬时惯性系 S' ,4 维质量流密度为常量 $J'^\mu = (\rho_0 c, 0, 0, 0)$,故有

$$\frac{\partial J^\mu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial J'^\mu}{\partial x'^\mu} = 0 \quad (1.3.25)$$

此式称作连续介质的连续性方程。它是质量守恒的表现,反映了体元内的固有质量不变。

对相对论运动方程式(1.3.16)两边同除固有体元 dV_0 ,作用在质点上的 4 维力密度为

$$f^\mu = \frac{dJ^\mu}{d\tau} = \rho_0 \frac{du^\mu}{d\tau} \quad (1.3.26)$$

它是指作用在固有体元内 dV_0 上的相对论 4 维力 F^μ ,根据体元收缩公式(1.1.14)和 4 维力的定义, $dV_0 = \gamma dV$, $F^\mu = \gamma(\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}/c, \mathbf{F})$,可知:

$$f^\mu = (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}/c, \mathbf{f})$$

利用连续性方程,可将式(1.3.26)变为

$$f^\mu = \rho_0 u^\nu \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\rho_0 u^\mu u^\nu) \quad (1.3.27)$$

即作用在物质系统上的 4 维力密度等于一个 2 阶对称张量

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 u^\mu u^\nu$$

的散度,将此对称张量定义为松散介质的能动张量。根据 4 维速度表达式(1.3.3),各分量可写成

$$T^{\mu\nu} = \gamma^2 \rho_0 \begin{bmatrix} c^2 & cv^1 & cv^2 & cv^3 \\ cv^1 & v^1 v^1 & v^1 v^2 & v^1 v^3 \\ cv^2 & v^2 v^1 & v^2 v^2 & v^2 v^3 \\ cv^3 & v^3 v^1 & v^3 v^2 & v^3 v^3 \end{bmatrix} \quad (1.3.28)$$

其中的 $\gamma^2 \rho_0$ 是相对于介质以速度 \mathbf{v} 运动的观测者测量的质量密度 ρ ,根据质量关系式(1.3.8)和体元收缩公式(1.1.14)可知

$$\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{\gamma dm_0}{dV_0/\gamma} = \gamma^2 \rho_0 \quad (1.3.29)$$

下面来看各个矩阵元的物理意义:

$T^{00} = \rho c^2$ 表示能量密度, 即单位体元内的能量;

$T^{0i}/c = T^{i0}/c = \rho v^i$ 表示动量密度, 即单位体元内的动量;

$T^{ij} = T^{ji} = \rho v^i v^j$ 则是动量流密度, 表示单位时间内通过法向为 \mathbf{e}_j 面元的动量密度的 i 分量。

将上面的结论推广到任意连续介质, 则体系的对称能动张量为

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu} = \begin{bmatrix} \varepsilon & c\sigma^1 & c\sigma^2 & c\sigma^3 \\ c\sigma^1 & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ c\sigma^2 & T^{12} & T^{22} & T^{23} \\ c\sigma^3 & T^{13} & T^{23} & T^{33} \end{bmatrix} \quad (1.3.30)$$

ε 是能量密度, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ 是动量密度, 也可写成 $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S}/c^2$, \mathbf{S} 是能量流密度 (单位时间内通过单位面积的能量)。任意体元 V 内的能量、动量以及通过体元边界 ∂V 的能量分别是:

$$E = \int_V \varepsilon dV, \quad \mathbf{p} = \int_V \boldsymbol{\sigma} dV, \quad E = \oint_{\partial V} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A} \quad (1.3.31)$$

$T^{ij} = T^{ji}$ 是动量流密度或应力张量, 可表示成并矢

$$\vec{T} = T^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = T^j \mathbf{e}_j, \quad (T^j = T^{ij} \mathbf{e}_i = \vec{T} \cdot \mathbf{e}_j) \quad (1.3.32)$$

其分量 T^{ij} 是单位时间内通过法向为 \mathbf{e}_j 单位面积上的动量的 i 分量, 或作用在法向为 \mathbf{e}_j 单位面积上的应力的 i 分量, T^j 是作用在法向为 \mathbf{e}_j 单位面积上的应力矢量, 如图 1.3.1 所示。对于理想流体, 即不存在黏滞性的气体或液体, 只有法向应力 T^{ii} 而没有切向应力 $T^{ij} (i \neq j)$ 。

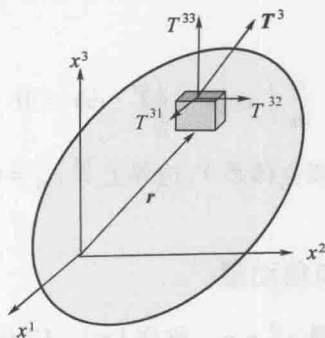


图 1.3.1 连续介质内部的应力张量

于是运动方程式(1.3.27)则推广为

$$f^\mu = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu}, \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \quad (1.3.33)$$

如果介质不受外力作用,则

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0, \quad (f^\mu = 0) \quad (1.3.34)$$

这就是连续介质的能量动量守恒律。分别讨论如下:

(1) 取 $\mu = 0$ 得到分量形式

$$\frac{\partial T^{0\nu}}{\partial x^\nu} = c \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) = 0 \quad (1.3.35)$$

或者写成

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0 \quad (1.3.36)$$

对任意体元积分

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathcal{E} dV + \oint_{\partial V} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad (1.3.37)$$

表示在体元 V 内能量的增加等于流进体元边界 ∂V 的能量。如果体元包含的整个物质体系与外界没有能量交换(孤立体系), $\mathbf{S}|_{\partial V} = 0$, 则体系总能量不随时间变化, 此即连续介质的能量守恒律。

(2) 取 $\mu = 1, 2, 3$ 又得到

$$\frac{\partial T^{i\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial \sigma^i}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{T}^i = 0, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.3.38)$$

两边乘上 e_i 后对 i 求和, 又得

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\mathbf{T}} = 0 \quad (1.3.39)$$

对体元积分

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \boldsymbol{\sigma} dV + \oint_{\partial V} \vec{\mathbf{T}} \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad (1.3.40)$$

这就是动量守恒律。对于孤立体系 V , 边界上 $\vec{\mathbf{T}}|_{\partial V} = 0$, 则体系内的总动量保持不变。

1.3.5 4 维自旋矢量和角动量

首先引入一个 3 阶张量 $\varepsilon^{ijk} = \varepsilon_{ijk}$, 称作 Levi - Civita 符号, 定义为 3 维直角坐标基矢的混合积

$$\varepsilon_{ijk} = (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_k = \begin{cases} +1 & (i, j, k \text{ 是偶序}) \\ -1 & (i, j, k \text{ 是奇序}) \\ 0 & (\text{任 2 指标相同}) \end{cases} \quad (1.3.41)$$

奇、偶序(或奇、偶置换)是以下标(123)为基准,相邻标号轮换次数的奇偶性。它只有6个不为0的分量:

$$\varepsilon_{123} = -\varepsilon_{132} = \varepsilon_{231} = -\varepsilon_{213} = \varepsilon_{312} = -\varepsilon_{321} = 1$$

应用 Levi - Civita 符号可以很方便地表示两个矢量的矢量积,根据定义式可知

$$\varepsilon_{ijk} A^i B^j = (A^i e_i \times B^j e_j) \cdot e_k = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_k \quad (1.3.42)$$

表示矢量积 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 的 k 分量。

上小节的结论对任意物质体系均成立,下面讨论质量密度相对不变的物体的角动量,根据式(1.3.35)可知如下条件成立:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0$$

设体系内任一小体元的位置矢量和动量密度分别为 $x^i, \sigma^i(x) (i=1,2,3)$, 构造下列张量

$$J^{ij} = \int x^i \sigma^j(x) dV \quad (1.3.43)$$

它具有一个特性

$$\begin{aligned} J^{ij} + J^{ji} &= \int (x^i \sigma^j + x^j \sigma^i) dV = \int \sigma^k \frac{\partial (x^i x^j)}{\partial x^k} dV \\ &= x^i x^j \sigma^k \Big|_{\partial V} - \int \frac{\partial \sigma^k}{\partial x^k} (x^i x^j) dV = 0 \end{aligned}$$

第2步用到 $\partial x^i / \partial x^k = \delta_k^i$, 第3步采用分部积分,最后一步是因为 $\boldsymbol{\sigma} \Big|_{\partial V} = 0$ 以及 $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0$ 。故它是一个反对称2阶张量,只有3个不为0的独立分量:

$$J^{12} = -J^{21}, \quad J^{23} = -J^{32}, \quad J^{31} = -J^{13}$$

将这些分量用一个矢量表示

$$\begin{aligned} (J_1, J_2, J_3) &= (J^{23} - J^{32}, J^{31} - J^{13}, J^{12} - J^{21}) \\ &= 2(J^{23}, J^{31}, J^{12}) \end{aligned}$$

采用 Levi - Civita 符号,就是

$$J_k = \varepsilon_{ijk} J^{ij} \quad \text{或} \quad J^{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} J_k \quad (1.3.44)$$

综合式(1.3.43)和式(1.3.44)得到

$$J_k = \int \varepsilon_{ijk} x^i \sigma^j dV = \int (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma})_k dV$$

于是得到体系的角动量表达式

$$\mathbf{J} = \int (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma}) dV \quad (1.3.45)$$

对于质点而言, $\sigma = \rho v = \gamma^2 \rho_0 v$, $dV = dV_0/\gamma$, 角动量是

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \quad (\mathbf{p} = \int \sigma dV = \gamma m_0 \mathbf{v}) \quad (1.3.46)$$

根据运动方程式(1.3.33), 体系受到外力的空间分量为

$$f^j = \frac{\partial T^{j\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial \sigma^j}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{T}^j$$

因而有

$$\begin{aligned} \int_V (\mathbf{r} \times \mathbf{f})_k dV &= \varepsilon_{ijk} \int_V x^i \frac{\partial \sigma^j}{\partial t} dV + \varepsilon_{ijk} \int_V x^i \nabla \cdot \mathbf{T}^j dV \\ &= \frac{dJ_k}{dt} + \varepsilon_{ijk} \int_V \nabla \cdot (x^i \mathbf{T}^j) dV \\ &= \frac{dJ_k}{dt} + \varepsilon_{ijk} \oint_{\partial V} x^i \mathbf{T}^j \cdot d\mathbf{A} = \frac{dJ_k}{dt} \end{aligned}$$

第2步是因为

$$x^i \nabla \cdot \mathbf{T}^j = \nabla \cdot (x^i \mathbf{T}^j) - (\nabla x^i) \cdot \mathbf{T}^j = \nabla \cdot (x^i \mathbf{T}^j) - T^{ij}$$

且 $T^{ij} = T^{ji}$, 最后一步是因为在体系的边界上应力为0。于是得到角动量定理

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \int \mathbf{r} \times \mathbf{f} dV = \mathbf{M} \quad (1.3.47)$$

当体系受到的外力矩为0时, 角动量守恒

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = 0, \quad (\mathbf{M} = 0) \quad (1.3.48)$$

体系的角动量包括轨道角动量 \mathbf{L} 和自旋角动量 \mathbf{S} :

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S} \quad (1.3.49)$$

前者是物质体系作为一个整体相对于某一点的角动量, 后者是相对于自身质心或通过质心转轴的角动量, 是物体的固有性质或内禀特性。例如, 地球的总角动量可分为绕太阳系质心的轨道角动量和绕自转轴的自旋角动量。

将参考系建立在物体质心上, 则物体只有自旋而没有轨道角动量。由式(1.3.47)和式(1.3.48)可得

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \int \mathbf{r}_c \times \mathbf{f} dV = \mathbf{M}_c \quad (1.3.50)$$

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = 0, \quad (\mathbf{M}_c = 0) \quad (1.3.51)$$

r_e, M_e 是外力作用点相对于质心的位矢和力矩。例如,虽然地球受到外部引力的作用,但相对于质心的力矩为 0,故它的自旋角动量守恒。

下面将 3 维自旋推广到 4 维。与 4 维动量的情况类似,定义 4 维自旋矢量为

$$S^\mu = (S \cdot v/c, S) \quad (1.3.52)$$

既然它是闵氏空间的矢量,与 4 维速度矢量的内积就应是标量。取相对于物体静止的瞬时惯性系 K' ,则自旋矢量的时间分量 $S'^0 = 0$,而 4 维速度为 $u'^\mu = (c, 0, 0, 0)$,二者的内积

$$\eta_{\mu\nu} S^\mu u'^\nu = \eta_{\mu\nu} S'^\mu u'^\nu = 0 \quad (1.3.53)$$

因 4 维速度是类时矢量,故 4 维自旋应为类空矢量。

当物体所受外力为 0 时, $dS/dt = 0$,且质心加速度 $dv/dt = 0$,因而

$$\frac{dS^0}{dt} = \frac{1}{c} \left(\frac{dS}{dt} \cdot v + S \cdot \frac{dv}{dt} \right) = 0$$

考虑到 $dt = \gamma d\tau$,有

$$\frac{dS^\mu}{d\tau} = 0, \quad (F = 0) \quad (1.3.54)$$

即 4 维自旋矢量为守恒量。式(1.3.54)是自由运动物体的基本方程之一,另一个是 $du^\mu/d\tau = 0$,分别表示自由运动物体的 4 维自旋矢量和 4 维速度矢量必定作平行移动。

1.4 光波的频移和行差效应

1.4.1 相位不变性和波阵面方程

按照爱因斯坦的光量子假设,光子的能量取决于光的频率 f 。由相对论能量表达式

$$hf = \frac{m_\gamma c^2}{\sqrt{1 - v_\gamma^2/c^2}}$$

因光子的速度 $v_\gamma = c$,要保证能量为有限值,只有一种可能:光子的静止质量 $m_\gamma = 0$,这是相对论的一个重要推论!这一结论得到了大量实验的支持,根据最新的实验结果,光子静止质量的上限是 $m_\gamma < 1.5 \times 10^{-52} \text{ g}$ 。

利用能量动量关系式(1.3.14), $E = pc$,光子的能量和动量表示为

$$\begin{cases} E = hf \\ p = h \frac{n}{\lambda} = hk \end{cases}$$

式中: h 为普朗克常量; f 和 λ 为光波的频率和波长; $\mathbf{k} = \mathbf{n}/\lambda$ 为波矢, \mathbf{n} 为沿光传播方向的单位矢量, $\lambda f = c$ 为光波的相速度, 在真空中与能量传播速度或群速度相同。

将上式代入式(1.3.9), 可得到光子的 4 维动量

$$p^\mu = (E/c, \mathbf{p}) = h(f/c, \mathbf{k})$$

等价地, 常常定义光子的 4 维波矢量

$$k^\mu = p^\mu/h = (f/c, \mathbf{k}) \quad (1.4.1)$$

它实际上是将波的频率 f 和 3 维波矢量 \mathbf{k} 合在一起构成的 4 维闵氏矢量。

根据 4 维能动矢量的变换关系式(1.3.13), 可知 4 维波矢量的变换为

$$\begin{cases} f' = \gamma(f - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) \\ k'^1 = \gamma\left(k^1 - \frac{v}{c^2}f\right) \\ k'^2 = k^2 \\ k'^3 = k^3 \end{cases} \quad (1.4.2)$$

又根据能量动量关系式(1.3.14), 4 维波矢量的分量满足

$$\eta_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = \left(\frac{f}{c}\right)^2 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 0 \quad (1.4.3)$$

故光的 4 维波矢量是类光矢量或零矢量(见式(1.2.27)), 它实际上反映的是光波的相速度为光速。

由于 4 维波矢 k^μ 和 4 维位矢 dx^μ 均为矢量, 二者的内积是一标量

$$\eta_{\mu\nu} k^\mu dx^\nu = f dt - \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} = d\varphi \quad (1.4.4)$$

对上式积分又得

$$\varphi(t, \mathbf{r}) = \varphi_0 + ft - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \text{inv.} \quad (1.4.5)$$

它反映的正是光传播的相位为不变量, 称为相位不变性。可以作两方面理解:

(1) 对于一个时空点 $(x^\mu; x'^\mu)$, 光波在该点的相位是一个实实在在的物理现象, 与观测者的运动状态无关 $(\varphi(t, \mathbf{r}) = \varphi'(t', \mathbf{r}'))$ 。如果在 S 系中测量光波在该点 (x^μ) 处于波峰, 在 S' 中测量 (x'^μ) 点也一定是波峰。

(2) 对于两个时空点的时空间隔 $(dx^\mu; dx'^\mu)$, 光波的相位差也与观测者的运动状态无关, 在 S 和 S' 系中测量光波在这两个时空点的相位差必定相等 $(d\varphi = d\varphi')$ 。

相位不变性是德布罗意在 1926 年研究物质波的相位时发现的, 它不仅适用于光波, 对一般平面波均成立。事实上, 相位不变性的前提为 4 维波矢是 4 维时空的矢量, 并不要求它是零矢量。

由于相位的微分

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt + \nabla \varphi \cdot d\mathbf{r}$$

与式(1.4.4)比较,可知光波的频率和3维波矢与相位的关系为

$$f = \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \mathbf{k} = -\nabla \varphi \quad (1.4.6)$$

于是式(1.4.3)也可写成

$$\eta^{\mu\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} = 0 \quad (1.4.7)$$

它反映光传播过程中相位随时空的变化关系,称作光波的波阵面方程。

1.4.2 多普勒频移效应

下面几节讨论光传播的频移和行差效应,其实质是不同参考系中光波频率和波矢量的变换关系。

设 S' 相对于 S 系的运动速度是 \mathbf{v} , 光子的频率和波矢在两系中分别为 (f', \mathbf{k}') 和 (f, \mathbf{k}) , 根据式(1.4.2)的第1式

$$f' = \gamma(f - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) = \gamma f(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})$$

$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c, \mathbf{n} = \lambda \mathbf{k}$ 为光传播方向单位矢。设光源静止于 S' 系, 在 S' 系中测得的频率为固有频率 $f' = f_0$, 则相对于光源运动的观测者测得的频率为

$$f = f_0 \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}} \quad (1.4.8)$$

式(1.4.8)表明, 相对于光源运动的观测者接收到的频率不同于光源的固有频率, 这种现象是多普勒在1842年首先预言的, 故称作多普勒效应。

有几种特殊情况:

(1) 若光源向着观测者而来, 即光源运动方向与光传播方向相同($\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n} = \beta$), 观测者接收到的频率大于固有频率, 发生蓝移现象

$$f = f_0 \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} > f_0 \quad (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n} = \beta) \quad (1.4.9)$$

(2) 若光源离开观察者而去($\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n} = -\beta$), 观测者接收到的频率小于固有频率, 是为红移

$$f = f_0 \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} < f_0 \quad (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n} = -\beta) \quad (1.4.10)$$

这两种情况都是纵向多普勒效应, 与经典多普勒效应类似。

(3) 值得一提的是,当光源横向运动即 $\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n} = 0$, 也产生红移

$$f = f_0 \sqrt{1 - \beta^2} < f_0 \quad (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n} = 0) \quad (1.4.11)$$

这种现象又称作横向多普勒效应,它是由于相对论的时间延缓引起的。在经典多普勒效应中不存在这种情况,因为在低速运动状态下的时间延缓可忽略。

注意:这里的“横向”是指观测者测量光传播方向与光源运动方向垂直 $\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n} = 0$ 。有的文献(如爱因斯坦原文)将“横向”定义为光源观测者测量光传播方向与观测者运动方向垂直,即 $\boldsymbol{\beta}' \cdot \mathbf{n}' = 0$,在此情况下应产生蓝移现象。这与上面的结论并不矛盾,因为 $\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n} = 0$ 和 $\boldsymbol{\beta}' \cdot \mathbf{n}' = 0$ 不可能同时成立,虽然 $\boldsymbol{\beta}' = -\boldsymbol{\beta}$ 但 $\mathbf{n}' \neq \mathbf{n}$,即光源和观测者测量的光传播方向是不同的(详见 1.4.4 节)。不过,现在通用的做法是以我们介绍的以观测者的测量为基准。

必须指出,虽然式(1.4.8)是就光子的情况得出的,也适用于其他粒子的平面波,只是分母中的 c 应换成平面波的相速度。为了说明这一点,我们应用相位不变性再作一次推导。

如图 1.4.1 所示,以观测者为参考点建立坐标系 $\{t, r\}$ (r 代表空间坐标),则他的世界线为时间轴,波源相对于观测者的速度为 v ,世界线是斜直线。设波源发射两个信号的事件分别为 $P_1(t, r)$ 和 $P_2(t + dt, r + dr)$,这两事件在光源参考系中时空坐标分别为 $(\tau_0, 0)$ 和 $(\tau_0 + d\tau_0, 0)$,相位的改变是 $d\varphi$;观测者接收到第一个和第二个信号的时空坐标分别为 $O_1(\tau, 0)$ 和 $O_2(\tau + d\tau, 0)$,由相位不变性可知相位变化也是 $d\varphi$ 。根据式(1.4.7),波源的固有频率和观测者接收到的频率分别为

$$f_0 = \frac{d\varphi}{d\tau_0} \quad f = \frac{d\varphi}{d\tau}$$

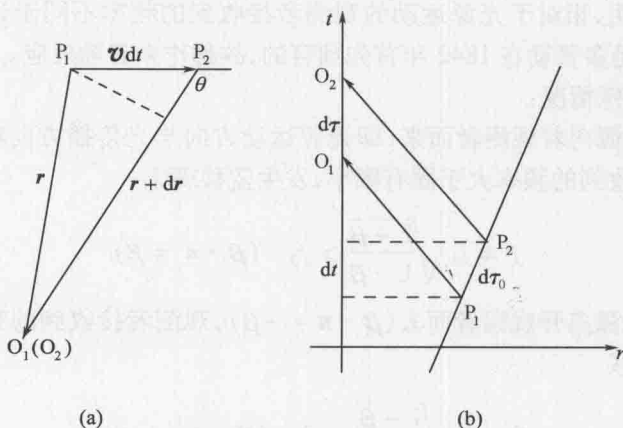


图 1.4.1 多普勒效应

(a) 波传播空间示意图; (b) 波传播时空图。

设平面波传播的相速度为 v_p , 信号发射时间 $t \rightarrow t + dt$ 与接收时间 $\tau \rightarrow \tau + d\tau$ 的关系是

$$\tau = t + \frac{r}{v_p}, \quad \tau + d\tau = (t + dt) + \frac{r + dr}{v_p}$$

两式相减得到

$$d\tau = dt \left(1 + \frac{1}{v_p} \frac{dr}{dt} \right) = dt \left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{v_p} \right)$$

其中, $dr/dt = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ 可由图 1.4.1(a) 看出。再由时间延缓, 波源经历的时间 $\tau_0 \rightarrow \tau_0 + d\tau_0$ 是固有时, 与对应的坐标时 $t \rightarrow t + dt$ 的关系为

$$d\tau_0 = dt \sqrt{1 - \beta^2}$$

故有

$$\frac{f}{f_0} = \frac{d\tau_0}{d\tau} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}/v_p} \quad (1.4.12)$$

这与式(1.4.8)是一致的。

1.4.3 多普勒计数测量原理

从应用的角度来讲, 多普勒频移公式是空间技术的有力武器, 利用它测量空间运动物体的速度和其他参数具有较高的精确度, 并且不受天气等自然环境的影响。一般情况下, 多普勒效应引起的频率变化 $|f - f_0|$ 较小, 常常采用多普勒计数的方法来进行测量。

在接收机中安装一个和光源的固有频率相同的振荡器, 将振荡器产生的振动(f_0)与接收到的振动(f)进行同方向合成(设均为简谐振动), 则合振动为

$$\begin{aligned} E &= E_0 \cos 2\pi f t + E_0 \cos 2\pi f_0 t \\ &= 2E_0 \cos[\pi(f - f_0)t] \cos[\pi(f + f_0)t], \\ &\quad (|f - f_0| \ll f_0) \end{aligned}$$

其中, $|2E_0 \cos[\pi(f - f_0)t]|$ 称作合振幅, $|f - f_0|$ 称为拍频。这种合振幅时强时弱的近简谐振动现象称作拍。因为当 $\pi(f - f_0)t = 0, \pm\pi, \dots$ 时合振幅最大, 所以拍频表示单位时间内最大振幅出现的次数(周波数), 其倒数则是最大振幅出现一次的时间, 如图 1.4.2 所示。

将拍频对时间 $t \rightarrow t + \Delta t$ 积分, 定义

$$C_d = \int_t^{t+\Delta t} (f_0 - f) dt \quad (1.4.13)$$

为多普勒积分计数, 简称多普勒计数。根据拍频的物理意义, 多普勒计数表示在

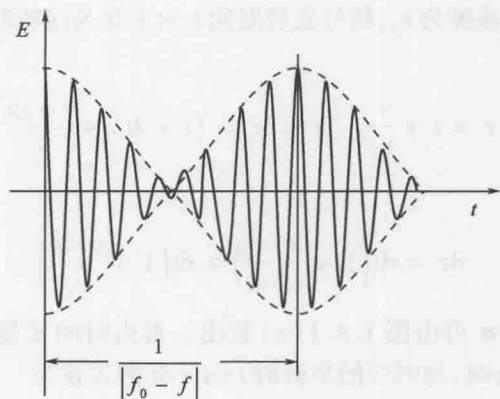


图 1.4.2 拍和拍频

Δt 时间内最大振幅出现的次数。

对一固定空间点的振动相位 φ , 其频率 $f = d\varphi/dt$, 则上式可表示为

$$C_d = \int_t^{t+\Delta t} (d\varphi_0 - d\varphi) = \Delta\varphi_0 - \Delta\varphi \quad (1.4.14)$$

可见, 多普勒计数实际上是测量在 Δt 时间内光波发射的相位 $\Delta\varphi_0$ 与观测者接收到的相位 $\Delta\varphi$ 的差。

现在, 我们将多普勒计数应用于光源与观测者的距离测量。将多普勒频移式(1.4.8)变形为

$$f_0 - f = -f_0 \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{c} - \frac{v^2}{2c^2} \right)$$

当物体的速度 $v \ll c$ 时, 有

$$f_0 - f \approx -\frac{f_0}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\lambda_0} \frac{dr}{dt}$$

式中: dr 为光源在 dt 内沿观测者到光源方向移动距离, $dr/dt = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ 则为沿观测者到光源方向的移动速度。于是得到

$$dr = \lambda_0 (f_0 - f) dt$$

对上式积分, 利用多普勒计数的定义, 得到

$$\Delta r = \lambda_0 C_d = \lambda_0 (\Delta\varphi_0 - \Delta\varphi)$$

此式表明, 只要在振动图上计算出 Δt 时间内最大振幅出现的个数 C_d , 也就得到在此时间内光源相对于观测者移动的径向距离 Δr 。这实际上是将距离的测量转化为计算光波传播的周波数。光源相对接收机静止时, 光波的传播距离为 $\lambda_0 \Delta\varphi_0$, 光源相对接收机运动时, 由于存在多普勒效应, 光传播的距离为 $\lambda_0 \Delta\varphi$, 二者之差即为光源相对接收机移动的径向距离。

多普勒计数是一种很精确也很实用的测量手段,可以精确测出光源在 Δt 时间内沿观测者到光源方向移动的距离 Δr 及速度 $\Delta r/\Delta t$ 。这一原理可以用于卫星的精确定位,因为当卫星相对于观测者微小偏移时,多普勒计数测量可以确定这个偏移量 Δr 。假设地球同步卫星的工作频率为 10MHz,波长约为 3.3cm。如果多普勒计数可以精确 0.1 周波数,由上式可知测量同步卫星的定位精度为 0.1 个波长,达到 mm 量级。

1.4.4 光行差效应

考虑光子在 2 维空间 $\{x, y\}$ 的传播,设 θ, θ' 分别是观测者和光源参考系测量的光源运动方向与光传播方向夹角

$$\theta = \arccos \frac{\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}}{\beta}, \quad \theta' = \arccos \frac{\mathbf{n}' \cdot \boldsymbol{\beta}'}{\beta'}$$

根据变换关系式(1.4.2)的第 2 和第 3 式得

$$\begin{cases} k'_1 = k' \cos \theta' = \gamma k (\cos \theta - \beta) \\ k'_2 = k' \sin \theta' = k \sin \theta \end{cases}$$

消去 k 和 k' , 即得到光子运动方向的变换关系为

$$\begin{cases} \sin \theta' = \frac{\sin \theta \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \theta} \\ \cos \theta' = \frac{\cos \theta - \beta}{1 - \beta \cos \theta} \end{cases} \quad (1.4.15)$$

将 $\beta \rightarrow -\beta$, 即得到逆变换

$$\begin{cases} \sin \theta = \frac{\sin \theta' \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta \cos \theta'} \\ \cos \theta = \frac{\cos \theta' + \beta}{1 + \beta \cos \theta'} \end{cases} \quad (1.4.16)$$

这就是光行差效应。

不难看出,如果观测者测量光传播方向与光源运动方向垂直,即 $\theta = \pi/2$, 则光源观测者测量的角度满足

$$\sin \theta' = \sqrt{1 - \beta^2} > 0, \quad \cos \theta' = -\beta < 0$$

同理可得 $\theta' = \pi/2$ 的情况,故有

$$\theta' > \frac{\pi}{2}, \quad \left(\theta = \frac{\pi}{2} \right); \quad \theta < \frac{\pi}{2}, \quad \left(\theta' = \frac{\pi}{2} \right) \quad (1.4.17)$$

这就是在 1.4.2 节所说的 θ 和 θ' 不可能同为 $\pi/2$, 除非光源相对于观测者静止。

光行差现象早在 1728 年就已经被发现,但直到狭义相对论建立后才得到正确的解释。它是指地球上观测者在不同时间观测同一星体,发现该星体在运动方向上有明显位移。实际上是星体发射光波到地球时,地球上的观测者在不同时间接收到光波传播方向不相同,导致所谓的“视差”,如图 1.4.3 所示。

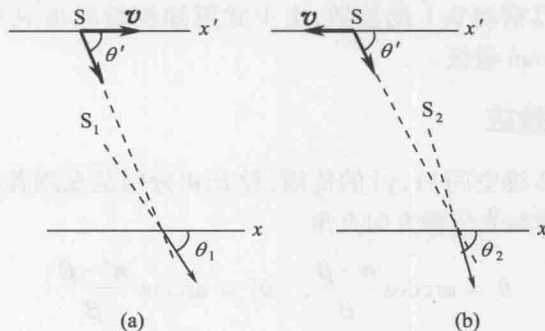


图 1.4.3 光行差效应

我们知道,如果在冬天时太阳相对于地球向东运动,则半年后的夏天太阳向西运动,可以假设星体相对于太阳静止,则星体相对于地球的运动与太阳的运动相同。由于观测者在半年前后相对于星体的运动方向不同,接收光子的方向分别为 θ_1 和 θ_2 ,其视像则分别是 S_1 和 S_2 。根据式(1.4.15)得到

$$\sin\theta' = \frac{\sin\theta_1 \sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\theta_1} = \frac{\sin\theta_2 \sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta\cos\theta_2}$$

由此解出

$$\sin\theta_2 - \sin\theta_1 = \frac{v}{c} \sin(\theta_2 + \theta_1)$$

如果 $v=0$ 或者 $c=\infty$,则 $\theta_1=\theta_2$,所以光行差现象是由于地球相对星体的运动($v\neq 0$)和光速的有限性($c\neq \infty$)产生的。根据实验观测值 θ_1 和 θ_2 ,可由上式求得地球相对于星体的速度。

由于地球围绕太阳的公转平均速度 $v_E \approx 30\text{km/s}$,地心观测者观测到星体在天球上的位置相对于太阳观测者观测到的位置存在偏差,这种现象称作周年光行差。当星—日连线与地—日连线垂直时,星体的视差达到最大值。如图 1.4.3(a)所示,设星体 S 发射光波的传播方向与 $x(x')$ 轴的夹角为 θ' ,它也是太阳观测者测量的角度,地球观测者接收光波的角度应由式(1.4.16)求得,地球与太阳观测者的最大视差($\theta'=\pi/2$)为

$$\Delta\theta = \theta' - \theta = \frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{1 - v_E^2/c^2} = 20.6''$$

由于地球自转导致地球表面观测者相对于地心观测者的视差称作周日光行差,

约在 10^{-1} 角秒量级。另外,由于太阳相对于银河系中心的运动和银河系本身的自转也会产生光行差,但周期很大。在空间技术中一般只需考虑周年光行差,其他光行差效应可以忽略不计。

参 考 文 献

- [1] 爱因斯坦 A. 爱因斯坦文集. 许良英, 范岱年, 等译. 北京: 商务印书馆, 2009.
- [2] 费保俊. 相对论与非欧几何. 北京: 科学出版社, 2005.
- [3] 刘辽, 费保俊, 张允中. 狭义相对论(2 版). 北京: 科学出版社, 2008.
- [4] Ackeret J. Zur theorie der raketen. Helv Phys Acta, 1946, 19.

第2章 广义相对论基础

广义相对论是爱因斯坦在 1915 年创立的。关于它的性质有两种不同的观点：一种观点认为广义相对论是狭义相对论的扩展，是时间和空间观念的又一场深刻革命，引力不是作为一种力而是表现为时空的弯曲——这是当前物理学界的正统观点。另一种观点将广义相对论看成动力学理论，是比牛顿的万有引力定律更为精确的引力理论，它不应涉及到时间和空间概念的改变。

就本书涉及的内容而言，这两种观点没有区别。对于初次接触广义相对论的读者，后一种观点可能更易于理解。因为我们只关心太阳系天体产生的引力效应，特别是讨论一些近似计算时，容易和经典场论的方法进行类比，例如可以建立整体坐标系，定义引力场的标量势和矢量势等。有鉴于此，在本章叙述广义相对论的基本原理，第 3 章讨论广义相对论的后牛顿近似理论，后面几章偏重于用后一种观点讲述相对论的应用。

2.1 基本原理及其几何基础

2.1.1 牛顿引力理论及其困难

1687 年，牛顿在伽利略、哥白尼等前人的研究基础上提出了著名的万有引力定律：质量为 m 的物体在物质源 M 的引力场中所受到的引力与二者距离的平方成反比。设 \mathbf{r}, \mathbf{r}' 分别是 m 和 M 的矢径，如果 $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ 远大于物质源的线度，可以将 M 视为质点，则 M 对 m 的引力为

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu m(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (\mu \equiv GM) \quad (2.1.1)$$

定义引力场的场强 $\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}/m$ 为 \mathbf{r} 处单位质量物体所受的引力，也就是此处的引力加速度。由于引力场是保守力场（无旋场）

$$\nabla \times \mathbf{g}(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.1.2)$$

可以引入引力势 $w(\mathbf{r})$ 的概念，满足一般关系式

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \nabla w(\mathbf{r}) \quad (2.1.3)$$

取无穷远为引力势的零点，则引力势为

$$w(\mathbf{r}) = \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{g}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.1.4)$$

注意这里的引力势与经典物理中的概念差一个负号。

牛顿引力势关于引力源是线性的,如果有许多引力源 $M_k (k=1,2,\dots)$ 可以看成质点,则它们产生的引力势满足线性叠加原理

$$w(\mathbf{r}) = \sum_k \frac{\mu_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_k|} \quad (\mu_k \equiv GM_k) \quad (2.1.5)$$

更一般地,设引力源的质量分布在有限区域 V 内,质量密度为 ρ ,则上式的求和应由积分代替,一般情况的引力势为

$$w(\mathbf{r}) = G \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3x' \quad (2.1.6)$$

满足泊松方程

$$\nabla^2 w(\mathbf{r}) \equiv \nabla \cdot \nabla w(\mathbf{r}) = -4\pi G\rho \quad (2.1.7)$$

这就是牛顿引力场方程。

如表 2.1.1 所列,我们可将牛顿引力场与真空中的静电场作一比较,其中 ρ_e, Φ, \mathbf{E} 分别是电荷密度、静电势和静电场的场强。但这只是形式上的类比,二者是有本质区别的。静电场只是电磁场的一种特殊表现形式,是观测者相对于源电荷静止时的测量结果,而牛顿引力场却与观测者无关,麦克斯韦电磁场理论与狭义相对论是相容的,而牛顿引力场却与狭义相对论存在深刻的矛盾。

表 2.1.1 牛顿引力场与静电场的形式比较

	牛顿引力场	静电场
源	ρ	ρ_e
势	$w = G \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{ \mathbf{r} - \mathbf{r}' } d^3x'$	$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_e(\mathbf{r}')}{ \mathbf{r} - \mathbf{r}' } d^3x'$
场	$\mathbf{g} = \nabla w$	$\mathbf{E} = -\nabla \Phi$
场方程	$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G\rho \\ \nabla \times \mathbf{g} = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = -\rho_e/\epsilon_0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = 0 \end{cases}$

牛顿引力理论在计算太阳系的天体运动和地球周围的物体运动方面是很成功的。在一般精度内,计算结果与实际情况符合得很好。但是,即使不考虑计算精度问题,就理论结构而言,牛顿引力理论存在着严重的逻辑困难。从狭义相对论原理的角度来看,其困难表现为以下两方面:

(1) 万有引力是一种超距作用,引力源对物体的吸引力是瞬时作用,亦即场能量的传播速度为无穷大。这显然违背了狭义相对论的光速极值原理,与现代物理的近距离作用思想相矛盾。事实上,在牛顿引力理论创立之初,许多物理学家

就曾经对此提出过批评,甚至牛顿本人也意识到“说引力是物质的一种先天的、内禀的、本质的性质,从而一个物体可以通过真空对远处另一个物体直接作用,可以不需要任何其他媒质,把它们的作用和力从一个物体传播到另一个物体——这种说法对我来说是如此之荒谬。我相信凡是对哲学问题有一定思考的人,都不会陷入这种谬论”。

(2) 万有引力定律不满足狭义相对性原理。狭义相对性原理要求:所有的物理规律在不同的惯性系中具有相同的形式,因此物理学家认为,只有满足相对性原理的物理规律才可能是正确的,否则必定是错误的。根据这一思想,物理学家发现几乎所有的物理规律都可以改造成满足狭义相对性原理,其中的麦克斯韦电磁场方程本来就满足这个原理,然而,唯有万有引力定律做不到这一点。对它作洛伦兹变换,就发现它的形式将发生改变,这表明万有引力定律不具备洛伦兹协变性。

2.1.2 广义相对性原理和等效原理

上面的分析表明,牛顿引力理论与狭义相对论的两条基本原理格格不入。那么,是否可以对牛顿引力理论进行改造,将其纳入狭义相对论体系呢?一些物理学家曾经做过这一方面的尝试,例如,将牛顿引力定律中的 r^2 改成 $r^{2+\alpha}$ ($\alpha \ll 1$),等等,但是这一切努力都归于失败,事实证明这条路行不通。

仍然是伟大的爱因斯坦,他意识到狭义相对性原理本身也存在不和谐因素。我们知道狭义相对论的相对性原理与伽利略力学相对性原理的推广,即在任意惯性系中的物理规律具有相同的形式,这就涉及到惯性系的定义和地位问题。

经典力学是根据牛顿第一定律(惯性定律)来定义惯性系的,惯性定律是说如果物体不受外力作用,它将处于静止或匀速直线运动状态。那么怎样判断物体是否受力呢?就是要看它的运动状态是否是静止或匀速直线运动,要判断物体的运动状态就要指定参考系——惯性系,可是什么样的参考系是惯性系呢?我们只能说惯性定律成立的参考系就是惯性系。显然这是一个逻辑循环,并没有真正定义惯性系。

与惯性系的定义相关的是惯性力的本质问题。在经典力学中,我们可以在非惯性系中引入一个惯性力,它是由于非惯性系相对于惯性系作加速运动产生的。引入惯性力之后,在非惯性系中物体的动力学行为与在惯性系中没有任何区别。那么惯性力具有实质上的意义吗?一般认为惯性力没有力源,不是一个真实的力,只是为了计算的方便而引入的一个假想力而已。但爱因斯坦并不是简单地这样认为,他将引力和惯性力视为等同,提出了一个等效原理,从而将引力和惯性这两个原本不相干的概念联系起来。

以上的引力、惯性力、惯性系三个问题是物理学的基本问题,也是物理学面临的巨大挑战。在深入探讨引力的过程中,爱因斯坦意识到这三者存在着本质

的联系。他认为自然界因而研究自然规律的物理学应该是和谐统一的,不可能也不应该有任何东西处于任何特殊的地位,所以惯性系的这种与其他参考系不平等的地位是不能容忍的。于是他将狭义相对性原理中的“惯性系”去掉,提出:如果将引力效应与时空背景融为一体,则所有的物理规律在任意参考系中具有相同的形式——这就是广义相对性原理,也叫做广义协变性原理。

广义相对性原理确实很优美,它不仅与狭义相对性原理统一起来,而且将上面的几个逻辑困难全部解决了,具体地说:

(1) 因为物质的相互作用不是表现为“力”,而是由时空的弯曲效果体现,因此也就不需要用动力学公式表示,不存在是否满足狭义相对性原理的问题。

(2) 惯性力也不是表现为“力”的形式,同样融入到时空背景之中。爱因斯坦认为:惯性力和引力是同一种性质的不同表现形式,“物体的同一个性质按照不同的处境或表现为‘惯性’,或表现为‘重量’”,从而揭示了惯性力的本性。

(3) 惯性系的定义问题也随之迎刃而解:惯性系,就是不存在引力的参考系,这里的引力也包含我们常说的惯性力,因为在广义相对论中二者局域不可区分。按照这个理解,我们经常应用的地面参考系不是惯性系,而在地球上空作自由落体运动的物体才是惯性系。

现在,问题的关键是怎样将引力“融入”到时空背景中去,我们先来看引力和惯性力是怎样联系起来的。

物理学家早就意识到,物理学中实际上存在两种“质量”概念:一种是牛顿引力定律中的质量,它表征的是一个物体产生引力的强弱程度,叫做引力质量 m_G ;还有一种是牛顿运动定律中的质量,它是物体惯性的度量,称作惯性质量 m_I 。在经典理论看来,二者不存在本质上的联系,然而实验一再证明引力质量和惯性质量严格相等,即 $m_G = m_I$ 。人们当然要问:这里面是否包含了更深刻的内容?正是从这里出发,爱因斯坦提出了著名的等效原理。

爱因斯坦设想了一个理想的电梯实验,常称作爱因斯坦电梯,如图 2.1.1 所示。假设一个观测者在电梯内的一侧用手枪作水平射击,观测子弹的运动轨迹,可以想象有以下几种情况:

- (a) 当电梯静止且不受引力作用时,子弹的轨迹是直线;
- (b) 如果电梯在地球上空作自由落体运动,受到地球引力加速度为 g ,子弹的轨迹仍是直线;
- (c) 如果电梯静止于地球引力场中时,子弹的轨迹是抛物线;
- (d) 假设在无引力情况下,让电梯向上作加速运动,子弹的轨迹也是抛物线。

情况(b)的结果与情况(a)相同,是因为子弹受到一个向下的地球引力 $F_G = -m_G g$;又因为电梯受到向下的加速度 $a = g$,物体还受到向上的惯性力

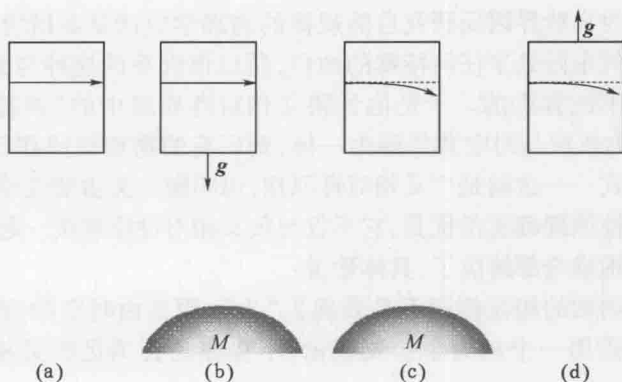


图 2.1.1 爱因斯坦电梯

- (a) 电梯静止且不受引力作用; (b) 电梯在引力场中自由落体;
(c) 电梯静止于引力场中; (d) 电梯向上加速且不受引力作用。

$F_I = m_I g$ 。由于 $m_G = m_I$, 故有

$$F_I + F_G = (m_I - m_G)g = 0$$

这就是说,电梯内的物体受到的引力和惯性力大小相等方向相反,等效于不受外力作用,按照惯性定律,物体作匀速直线运动。所以电梯内的观察者得出结论,他所在的电梯就是惯性系。这个实验可以通俗地解释为:当一个人作自由落体运动时不会感觉到自己的重量。情况(c)的结果是由于子弹受到向下的引力作用,而情况(d)则是受到向下的惯性力,如果电梯里的观测者不知道电梯的运动状态,那么他可以认定子弹是受到引力的作用而偏离直线。

上面的实验表明,我们可以让惯性力将引力“抵消”(如情况(b)),也可以让惯性力“模拟”出引力的效果(如情况(d)),使得任何力学实验无法区分出是惯性力还是引力的动力学效果。因此在一个较小的区域内,惯性力和引力的动力学效应是不可区分的——通常将这个结论称作弱等效原理。

现在,再假设上面的实验中,不是用手枪而是用激光枪射击,可以想象激光的轨迹与子弹应该相似,这表明无论是力学实验还是电磁实验都不能区分引力和惯性力。因此爱因斯坦将弱等效原理中“动力学效应”推广为任何“物理效应(包括电磁效应)”:在一个较小的区域内,惯性力和引力的任何物理效应是不可区分的——后来人们称之为爱因斯坦等效原理。

必须指出,等效原理中的“等效”是指引力和惯性力在一个很小的区域(局域)内等效,在一个较大的区域是不可能等效的。假如上面实验中的电梯很大,情况(a)和(b)以及(c)和(d)的效果就不可能完全一致。因为电梯内不同区域的引力大小和方向不相同,而惯性力却相同。

弱等效原理的实质是任何物体的引力质量与惯性质量相等,与其大小和组

成材料无关,已经为越来越多的精密实验所证实。著名的伽利略比萨斜塔实验是对等效原理首次检验,在忽略空气阻力的情况下,两个不同重量的物体从塔顶同时自由下落后将同时达到地面。1680年,牛顿用单摆进行了实验:两个摆长相同而质量不同的单摆同时开始摆动,在 10^{-3} 的精度上没有观测到周期的不同。19世纪末,Eötvös等人利用精密扭秤对等效原理进行了实验检验:把两个不同材料的物体悬挂在扭秤的两端,两个物体都会受到地球引力和地球自转产生的惯性力。如果引力质量与惯性质量之比不是一个常数,那么在扭秤平面内就会有一个力矩作用在扭臂上,使扭秤发生偏转。通过测量扭秤偏转的角度,得出实验检验精度约为 10^{-10} ,这个精度后来得到进一步提高。

除自由落体、单摆和扭秤实验外,Williams等人利用激光月地测距(LLR)的方法来检验等效原理,它是通过测量地球和月球在太阳引力场中的自由落体加速度的差异来实现的。设地球和月球在太阳引力场中的自由落体加速度分别为 a_E 和 a_M ,利用 $m_1 a = m_G g$,二者的相对变化率可表示为

$$\frac{\Delta a}{\bar{a}} = \frac{a_E - a_M}{(a_E + a_M)/2} = 2 \frac{(m_G/m_1)_E - (m_G/m_1)_M}{(m_G/m_1)_E + (m_G/m_1)_M}$$

如果 $a_E \neq a_M$,则地月距离应该产生相应的扰动。根据地月测距的数据计算出 $\Delta a/\bar{a} \approx 10^{-13}$,表明在 10^{-13} 精度上弱等效原理仍然成立。

需要说明,虽然弱等效原理有众多实验支持,但爱因斯坦等效原理还没有充足的实验基础,正确与否取决于实践的检验。

2.1.3 广义时空间隔不变性

我们知道,狭义相对论的基本原理导致了惯性系的时空间隔不变性

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu \quad (2.1.8)$$

式中: $(X^\mu | \mu=0,1,2,3)$ 和 $\eta_{\mu\nu}$ 为惯性系 K 的时空坐标和度规。根据广义相对性原理,如果将引力(惯性力)融入时空背景中,在任意参考系 S 中的物理规律应具有相同的形式。因为两个参考系的坐标变换为

$$dX^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \quad \text{或} \quad dx^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial X^\beta} dX^\beta \quad (2.1.9)$$

因而在 S 系中的时空间隔成为

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\beta} dx^\alpha dx^\beta = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (2.1.10)$$

式中:度规

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\beta} \quad (2.1.11)$$

所以不同参考系的时空间隔形式相同。进一步,式(2.1.8)描述的是平直的闵

氏时空线元,式(2.1.10)反映的就是任意弯曲时空的线元,因为引力已经融入时空背景中了。

为了不至于太抽象,讨论一个具体的例子——爱因斯坦转盘。假设一圆盘绕中心支点在水平面内旋转,由于转盘相对于地面存在加速度,在地面的静止观察者位于惯性系(不考虑地球重力),在转盘上的静止观察者位于非惯性系,二者具有不同的时空观。

如图2.1.2所示,设转盘参考系 $S(x^\mu)$ 相对于地面惯性系 $K(X^\mu)$ 以常角速度 ω 转动。取2维空间坐标为极坐标,时空坐标分别为 $\{t', r, \phi\}$ 和 $\{T, R, \Phi\}$,惯性系与转动系的坐标变换为

$$T = t', \quad R = r, \quad \Phi = \phi - \omega t' \quad (2.1.12)$$

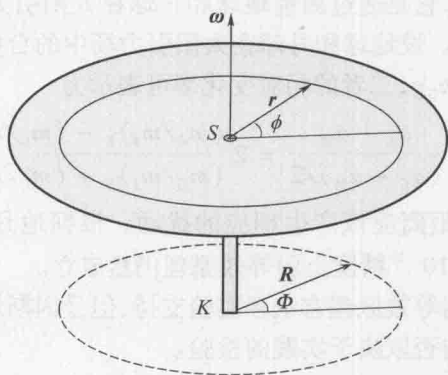


图2.1.2 爱因斯坦转盘

将上式代入惯性系时空间隔式,得到转动系的时空间隔

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 dT^2 - dR^2 - R^2 d\Phi^2 \\ &= \left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right) c^2 dt'^2 + 2\omega r^2 d\phi dt' - dr^2 - r^2 d\phi^2 \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

为了消去上式中的时空交叉项,再作时间变换

$$dt = dt' + \frac{\omega r^2/c^2}{1 - \omega^2 r^2/c^2} d\phi$$

则时空间隔式变为

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(dr^2 + \frac{r^2}{1 - \omega^2 r^2/c^2} d\phi^2\right) \quad (2.1.14)$$

度规张量是

$$g_{00} = 1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}, \quad g_{11} = -1, \quad g_{22} = -\frac{r^2}{1 - \omega^2 r^2/c^2} \quad (2.1.15)$$

得到以下两个结论:

(1) 上面的度规表明 3 维时空是弯曲的。为明确起见,来看 2 维空间部分。在上式中令 $dt=0$, 得到 2 维空间线元:

$$dL^2 = -ds^2|_{dt=0} = dr^2 + \frac{r^2}{1 - \omega^2 r^2/c^2} d\phi^2$$

dL 表示在同一坐标时刻($dt=0$)测量空间两点(r, ϕ)和($r+dr, \phi+d\phi$)的无穷小弧长。显然,当 $\omega=0$ 时上式退化为极坐标下的欧氏弧长。在上式中令 $dr=0$ ($r=\text{常数}$), 则可求得圆周长

$$L = \int_0^{2\pi} \frac{rd\phi}{\sqrt{1 - \omega^2 r^2/c^2}} = \frac{2\pi r}{\sqrt{1 - \omega^2 r^2/c^2}} > 2\pi r$$

或者用圆周率(圆周长与直径 $D=2r$ 的比值)表示为

$$\frac{L}{D} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - \omega^2 r^2/c^2}} > \pi \quad (2.1.16)$$

根据几何学的知识,几何空间可以按圆周率分为 3 种:

$$\frac{L}{D} \begin{cases} = \pi & (\text{欧氏空间}) \\ > \pi & (\text{双曲空间}) \\ < \pi & (\text{椭圆空间}) \end{cases} \quad (2.1.17)$$

其中欧氏空间是平直的,而双曲空间和椭圆空间是弯曲的。双曲几何和椭圆几何称为非欧几何,分别是罗巴切夫斯基和黎曼在 19 世纪上半叶建立的,后来黎曼用微分的方法将它们统一起来,建立了黎曼几何,它是广义相对论的几何基础。由上面两式可知,转动系的空间属于双曲几何空间(罗氏空间),只是在转动系的中心区域($r \rightarrow 0$)近似为欧氏空间,这就是非惯性系的非欧几何特性。

(2) 时空弯曲是引力产生的。在地面惯性系的观测者看来,转盘是一个非惯性系,相对于惯性系的加速度为 $\omega \times (\omega \times r) = -\omega^2 r$, 单位质量物体所受的惯性力为 $\omega^2 r$ 。根据等效原理,如果转盘上的观测者不知道自己加速运动,在他看来是由于处于引力场中,引力场强是 $\omega^2 r$, 引力势则为(取 $r=0$ 处引力势为 0)

$$w = \int_0^r \omega^2 r \cdot dr = \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \quad (2.1.18)$$

式(2.1.18)正是度规中的因子,因而式(2.1.15)也可写成

$$g_{00} = 1 - \frac{2w}{c^2}, \quad g_{11} = -1, \quad g_{22} = -\frac{r^2}{1 - 2w/c^2} \quad (2.1.19)$$

当 $w=0$ 时上式退化为平直时空的度规($g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$)。

这样,我们在保证不同参考系时空间隔形式相同的前提下,将时空间隔的度规与引力场联系起来。通俗地说,时空度规对应于引力场的引力势。当不存在引力场时度规退化为闵氏度规,在引力场中的度规则是黎曼度规。这种将引力

用时空几何的特性来表征的思想就是引力几何化。

关于“引力几何化”的观念,有两种不同的认识:第一种是 Weyl 和 Eddington 等人的观点,将时空结构看成物理实在,而引力表现为 4 维时空流形的曲率;第二种是爱因斯坦的观点,认为引力场才是物理实在。而时空是它的结构性。也有人将前者称作“引力几何化”,后者叫做“时空几何引力化”。坦率地说,这两种观点在数学上没有什么区别,在引力导致时空流形的弯曲这一点上是共同的。至于引力和时空结构谁是物理实在,恐怕有待于进一步的实验检验,如果可以设计出实验区别两种观点的话。

时空背景与几何学是密不可分的。经典力学的绝对时空以欧氏几何为基础,狭义相对论的几何基础是 4 维伪欧几何。按照广义相对论之前的观点,时空背景是运动学问题,万有引力是动力学参量。爱因斯坦认为“引力场由物质的分布决定,并随之而演化。正如黎曼所描述的那样,空间并不是绝对的,它的结构与物理不能分割,我们宇宙的几何绝不像欧氏几何那样孤立自足。”他将万有引力与时空背景联系起来,也就是将引力几何化,这时的 4 维时空几何就成了黎曼几何——这是广义相对论的核心问题,也是它的精髓所在。

2.1.4 黎曼几何的基本概念

为了在有限篇幅内给出黎曼几何的基本概念,同时又不陷入复杂的数学运算,我们采用一种简单明确但不太严格的引入方式:首先直观地讨论欧氏空间中曲面上的几何,然后将此 2 维弯曲空间的结论直接推广到 4 维黎曼空间。为清楚起见,本节中上下指标的拉丁字母取值为 $i, j, \dots = 1, 2$, 希腊字母则取 $\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2, 3$ 。

1. 度规和线元

如图 2.1.3 所示,在 3 维欧氏空间 $\{\xi^1, \xi^2, \xi^3\}$ 的一个 2 维曲面上建立曲线坐标 $\{x^1, x^2\}$, 一般取测地平行坐标(例如球面上的经纬线坐标),它是平面上的直

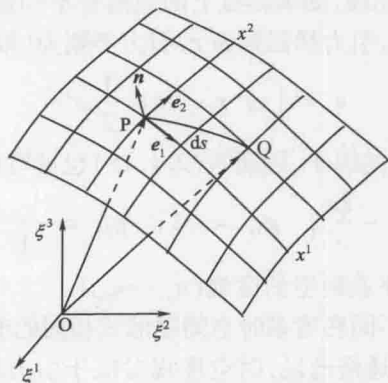


图 2.1.3 面上的曲线坐标和自然标架

角坐标在曲面上的推广。曲线坐标在某点的坐标基矢($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$)构成的平面是该点的切平面,曲面的法向基矢必定与切平面垂直

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}{|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2|}$$

注意坐标基矢不一定是单位矢量,二者也不一定正交。这样,任意矢量必定可以在自然标架 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}\}$ 上展开,而曲面上的切矢量则没有法向分量。

设欧氏空间的位置矢量 \mathbf{r} 在 dt 时间内变换到 $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$,如果 $d\mathbf{r} = \overrightarrow{PQ}$ 落在曲面的切平面上,则可表示为

$$d\mathbf{r} = dx^i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} = dx^i \mathbf{e}_i$$

$\mathbf{e}_i = \partial \mathbf{r} / \partial x^i$ 是一种直观的表述,表示矢量在 x^i 方向的变化量。当 $|d\mathbf{r}| \rightarrow 0$ 时这个切矢量的长度即为曲面上无穷小弧长,其平方为

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = g_{ij} dx^i dx^j$$

式中的 ds 称为线元, $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ 是曲面的度规,对于平面上的直角坐标,度规退化为我们熟知的欧氏度规 $g_{ij} = \delta_{ij}$ 。

推广到4维空间,任意4维位移矢量可表示成

$$dx = dx^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = dx^\mu \mathbf{e}_\mu \quad (2.1.20)$$

黎曼几何中采用偏微分算符 $\mathbf{e}_\mu = \partial / \partial x^\mu$ 作为自然基矢,是曲面上基矢 $\partial \mathbf{r} / \partial x^i$ 的自然推广。4维空间的线元则推广为

$$ds^2 = \langle dx, dx \rangle = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.1.21)$$

其中

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} = \langle \mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu \rangle \quad (2.1.22)$$

是4维空间的度规。显然,对于平直的4维闵氏空间,度规退化为闵氏度规 $\eta_{\mu\nu}$,所以 $g_{\mu\nu} \neq \eta_{\mu\nu}$ 反映了相对于平直空间的偏离,表现为空间的弯曲。

度规 $g_{\mu\nu}$ 是2阶张量的协变分量,因为在任意坐标变换下,它的变换满足张量变换关系(见式(1.2.34)):

$$g'_{\mu\nu} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x'^\mu}, \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \right\rangle = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}$$

定义逆变张量 $g^{\mu\nu}$,与协变分量的关系是(见式(1.2.10))

$$g_{\mu\alpha} g^{\nu\alpha} = \delta_\mu^\nu = g_\mu^\nu \quad (2.1.23)$$

特别地,如果张量矩阵中只有4个对角元素不为0,则逆变和协变分量的关系较

为简单:

$$g^{\mu\mu} = 1/g_{\mu\mu}, \quad (g_{\mu\nu} = 0 (\mu \neq \nu)) \quad (2.1.24)$$

在黎曼空间的任意张量可以由度规将其指标提升和下降(见式(1.2.32))。

2. 黎曼联络

正因为曲面的弯曲,不同点的坐标基矢并非常量,其变化量不仅有切向还有法向分量,在自然标架上分解为

$$de_i = \Gamma_{ij}^k e_k + b_i n = (\Gamma_{ij}^k e_k + b_i n) dx^j$$

$$\frac{\partial e_i}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k e_k + b_i n$$

$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k dx^j$ 和 Γ_{ij}^k 分别是 de_i 和 $\partial e_i / \partial x^j$ 的切向分量,而 $\partial e_i / \partial x^j$ 表示坐标基矢沿 x^j 方向的变化量,所以 Γ_{ij}^k 反映了曲面上一点周围几何特性的相互联系,称作联络系数。在黎曼几何中假定联络关于两个下指标对称, $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, 称为黎曼联络。

我们来看联络与度规的关系。对上式两边点乘 e_l , 由 $n \cdot e_l = 0, e_k \cdot e_l = g_{kl}$, 故有

$$e_l \cdot \frac{\partial e_i}{\partial x^j} = g_{kl} \Gamma_{ij}^k$$

于是有

$$\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} = e_l \cdot \frac{\partial e_i}{\partial x^j} + e_i \cdot \frac{\partial e_l}{\partial x^j} = g_{kl} \Gamma_{ij}^k + g_{ik} \Gamma_{jl}^k$$

作指标轮换 $i \rightarrow l \rightarrow j \rightarrow i$, 又得到两个方程

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^i} = g_{kj} \Gamma_{li}^k + g_{kl} \Gamma_{ji}^k$$

$$\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^l} = g_{ki} \Gamma_{jl}^k + g_{kj} \Gamma_{il}^k$$

将上面3式的前2式相加再减第3式,并利用联络和度规的对称性,可得

$$g_{kl} \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right)$$

将上式推广到4维空间,作指标替换 $i, j, k, l \rightarrow \alpha, \beta, \mu, \nu$, 并利用式(2.1.23):

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 1, \quad (\text{对 } \mu \text{ 不求和})$$

得到4维空间的对称联络

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \Gamma_{\beta\alpha}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\nu}} \right) \quad (2.1.25)$$

黎曼联络取决于空间的度规及其导数,由空间本身的性质所决定,是一个内蕴量,也就是说给定一个空间就有相应的联络。显然,对于闵氏空间的直角坐标, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ 为常数,因而联络的所有分量均为 $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = 0$,它也可以作为空间平直的充分条件。

但是联络并不是 3 阶混合张量,利用度规张量的变换关系式(1.2.34)直接对上式作坐标变换,得到联络的变换关系式

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\beta}} \Gamma_{\rho\sigma}^{\lambda} + \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial^2 x'^{\nu}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} \quad (2.1.26)$$

由于多出后面一项,不满足张量的变换规律。即使在 S' 系中的所有分量 $\Gamma_{\rho\sigma}^{\lambda} = 0$,在 S 中仍然有可能 $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \neq 0$ 。正因为如此,我们也可以用坐标变换来定义联络:设 (x'^{μ}) 是 4 维闵氏空间的时空坐标,由于该系中的联络 $\Gamma_{\rho\sigma}^{\lambda}(x') = 0$,在任意参考系 (x^{μ}) 中的联络就是

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}(x) = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial^2 x'^{\nu}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}}, \quad (\Gamma_{\rho\sigma}^{\lambda}(x') = 0) \quad (2.1.27)$$

3. 绝对微分

考虑曲面上一个任意切矢量 $X = X^k e_k$,其微分为

$$\begin{aligned} dX &= dX^k e_k + X^k de_k \\ &= (dX^k + X^i dx^j \Gamma_{ij}^k) e_k + X^i dx^j b_{ij} n \end{aligned}$$

由于它有法向分量,已经不是曲面上的切矢量。简单地说,当我们讨论镶嵌在 3 维欧氏空间的 2 维曲面时,法向分量可以借助于包容空间得到解释,但是推广到高维空间的话,这个矢量就不属于空间本身而变得没有意义。为此,把法向分量去掉,将矢量微分在切空间上的投影定义为

$$DX = (dX^k + X^i dx^j \Gamma_{ij}^k) e_k$$

称为绝对微分或协变微分。

对 4 维空间中的任意矢量 $X = X^{\mu} e_{\mu}$,绝对微分为

$$DX = (dX^{\mu} + X^{\alpha} dx^{\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}) e_{\mu} \quad (2.1.28)$$

$$DX^{\mu} = dX^{\mu} + X^{\alpha} dx^{\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \quad (2.1.29)$$

绝对微分与普通微分不同,上式右边第 2 项是由于空间弯曲产生的改变量。但由定义可知绝对微分与普通微分的运算规则完全相同,并且对标量微分二者相等,以下是标量函数和两个矢量的内积(标量)、外积的绝对微分公式

$$\begin{cases} Df = df \\ D\langle X, Y \rangle = \langle dX, Y \rangle + \langle X, dY \rangle \\ D(XY) = (DX)Y + X(DY) \end{cases} \quad (2.1.30)$$

利用式(2.1.30)的第2式,可求出逆变矢量的绝对微分。因矢量内积的绝对微分也可写成

$$D(X_\mu Y^\mu) = (DX_\mu)Y^\mu + X_\mu(DY^\mu)$$

因而

$$\begin{aligned}(DX_\mu)Y^\mu &= (dX_\mu)Y^\mu + X_\mu(dY^\mu - DY^\mu) \\ &= (dX_\mu - X_\alpha dx^\beta \Gamma_{\mu\beta}^\alpha)Y^\mu\end{aligned}$$

于是得到逆变矢量的绝对微分

$$DX_\mu = dX_\mu - X_\alpha dx^\beta \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \quad (2.1.31)$$

再由矢量外积的绝对微分

$$D(X_\mu Y^\nu) = (DX_\mu)Y^\nu + X_\mu(DY^\nu)$$

定义2阶混合张量 $T_\mu^\nu = X_\mu Y^\nu$, 利用式(2.1.29)和式(2.1.31)可得到它的绝对微分是

$$DT_\mu^\nu = dT_\mu^\nu + T_\mu^\alpha dx^\beta \Gamma_{\alpha\beta}^\nu - T_\alpha^\nu dx^\beta \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \quad (2.1.32)$$

同理,可求出2阶协变张量 $T_{\mu\nu} = X_\mu Y_\nu$ 和逆变张量 $T^{\mu\nu} = X^\mu Y^\nu$ 的绝对微分。

将绝对微分记作

$$DX^\mu = \nabla_\beta X^\mu dx^\beta, \dots$$

∇_β 是对坐标 x^β 的绝对导数算符。我们将矢量和2阶张量的绝对导数公式罗列于下:

$$\begin{cases} \nabla_\beta X^\mu = \partial_\beta X^\mu + X^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \\ \nabla_\beta X_\mu = \partial_\beta X_\mu - X_\alpha \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \\ \nabla_\beta T_\mu^\nu = \partial_\beta T_\mu^\nu + T_\mu^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\nu - T_\alpha^\nu \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \\ \nabla_\beta T^{\mu\nu} = \partial_\beta T^{\mu\nu} + T^{\mu\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^\nu + T^{\alpha\nu} \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \\ \nabla_\beta T_{\mu\nu} = \partial_\beta T_{\mu\nu} - T_{\mu\alpha} \Gamma_{\nu\beta}^\alpha - T_{\alpha\nu} \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \end{cases} \quad (2.1.33)$$

$\partial_\alpha \equiv \partial/\partial x^\alpha$ 为偏导数算符。利用上面的第3、4、5式以及式(2.1.25)可知度规张量有一个特性:

$$\nabla_\alpha g_\mu^\nu = \nabla_\alpha g^{\mu\nu} = \nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0 \quad (2.1.34)$$

4. 黎曼曲率

式(2.1.33)的第1式是2阶混合张量,利用第3式再求绝对导数,可得

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta X^\mu = \nabla_\beta \nabla_\alpha X^\mu + X^\gamma R_{\gamma\beta\alpha}^\mu \quad (2.1.35)$$

式中的

$$R_{\gamma\beta\alpha}^{\mu} = \frac{\partial \Gamma_{\gamma\beta}^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial \Gamma_{\gamma\alpha}^{\mu}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma_{\gamma\beta}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\alpha}^{\mu} - \Gamma_{\gamma\alpha}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\beta}^{\mu} \quad (2.1.36)$$

称作黎曼曲率张量。如果是在平直空间,绝对微分退化为普通微分,它对坐标的2次导数可以对易。而式(2.1.34)则表明沿不同坐标方向的绝对导数是不同的,所以曲率张量反映了空间的弯曲程度。

张量有一种特殊的运算——缩并,它是对某对上、下指标取相同值并求和,等价于用 δ 函数相乘。如对曲率张量的上指标和第2下指标缩并运算是

$$R_{\gamma\alpha} = R_{\gamma\beta\alpha}^{\beta} = g_{\mu}^{\beta} R_{\gamma\beta\alpha}^{\mu} = \delta_{\mu}^{\beta} R_{\gamma\beta\alpha}^{\mu}$$

由此得到是曲率张量的迹——Ricci 曲率张量:

$$R_{\gamma\alpha} = \frac{\partial \Gamma_{\gamma\beta}^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial \Gamma_{\gamma\alpha}^{\beta}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma_{\gamma\beta}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\alpha}^{\beta} - \Gamma_{\gamma\alpha}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\beta}^{\beta} \quad (2.1.37)$$

以及 Ricci 曲率张量的迹——标量曲率

$$R = R_{\alpha}^{\alpha} = g^{\gamma\alpha} R_{\gamma\alpha} \quad (2.1.38)$$

黎曼曲率、Ricci 曲率和标量曲率分别是黎曼空间的4阶、2阶和0阶张量,由空间的度规及其导数唯一确定,是决定空间弯曲的充分必要条件。如果曲率处处为0,则空间是平直的,否则表明4维空间弯曲。

作为一例,我们来计算爱因斯坦转盘的纯空间曲率,从中可以体会曲率的几何意义。式(2.1.15)给出的2维空间度规为

$$g_{11} = \frac{1}{g^{11}} = -1, \quad g_{22} = \frac{1}{g^{22}} = -r^2 \gamma^2$$

式中定义了一个函数:

$$\gamma(r) = \frac{1}{\sqrt{1 - r^2 \omega^2 / c^2}}$$

根据式(2.1.25)求出不为0的联络为

$$\Gamma_{22}^1 = -r\gamma^4, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{\gamma^2}{r}$$

由式(2.1.37)和式(2.1.38)即可得到 Ricci 曲率和标量曲率分别为

$$R_{11} = \frac{3\omega^2 \gamma^4}{c^2}, \quad R_{22} = -\frac{3\omega^2 r^2 \gamma^6}{c^2}$$

$$R = g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} = -\frac{6\omega^2 \gamma^4}{c^2}$$

它们描述了爱因斯坦转盘的空间弯曲程度, $R < 0$ 反映空间的双曲特性,与2.1.3节的结论相符。

另外, $R > 0$ 表示空间的椭圆特性。例如, 对于半径为 ρ 的 2 维球面上的线元

$$ds^2 = \rho^2 (dr^2 + r^2 d\phi^2)$$

可求出标量曲率为 $R = 2/\rho^2 > 0$, 读者不妨验证之。

2.1.5 伪黎曼时空的力学规律

从本质上看, 狭义相对论进化到广义相对论, 就是背景时空从平直的 4 维闵氏空间或伪欧空间变成 4 维伪黎曼时空。“伪”是说黎曼空间的度规张量矩阵为正定矩阵, 即特征值均大于 0, 而 4 维伪黎曼空间度规的符号我们取 $\text{diag}(+, -, -, -)$, 上节的所有结论对伪黎曼时空均成立, 以后仍称作黎曼空间。(也有文献取时空度规的符号是 $\text{diag}(-, +, +, +)$, 在此情况下上节中一些公式的符号要改变, 如式(2.1.37)和式(2.1.38)等)

既然背景时空发生了改变, 那么, 赖以生存的物理规律也要产生相应的变化。考虑到后文的应用, 这里讨论第 1 章给出的基本力学规律在伪黎曼空间的表述。这项工作其实很简单, 对狭义相对论力学公式中的度规及算符作以下替换

$$\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}, \quad \partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu, \quad d \rightarrow D$$

即可得到广义相对论的力学规律。

1. 4 维位移和速度

由于坐标 x^μ 在黎曼空间是一个标量, 即使是 4 个时空坐标给出的位置坐标(x^μ)也不是矢量, 因而 4 维位移 dx^μ 和 4 维速度 $u^\mu = dx^\mu/d\tau$ 的定义在平直和弯曲空间没有区别, 矢量长度则分别为

$$\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = ds^2 \rightarrow g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = ds^2 \quad (2.1.39)$$

$$\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = c^2 \rightarrow g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = c^2 \quad (2.1.40)$$

虽然结果相同, 但内积的定义不同:

$$\langle A, B \rangle = \eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu \rightarrow \langle A, B \rangle = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu$$

2. 4 维加速度

闵氏空间的 4 维加速度与黎曼空间不同, 是因为后者包含了引力的作用:

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} \rightarrow a^\mu = \frac{Du^\mu}{d\tau} \quad (2.1.41)$$

自由质点的运动方程分别为

$$\frac{du^\mu}{d\tau} = 0 \rightarrow \frac{Du^\mu}{d\tau} = 0 \quad (2.1.42)$$

前者表示在平直空间中不受任何外力作用质点的匀速直线运动, 后者是弯曲空

间中仅受引力作用质点的测地线运动(详见 2.4.1 节)。

3. 4 维自旋及其守恒律

4 维自旋矢量在平直和弯曲空间均为与 4 维速度正交类空矢量:

$$\eta_{\mu\nu} S^\mu u^\nu = 0 \rightarrow g_{\mu\nu} S^\mu u^\nu = 0 \quad (2.1.43)$$

自由运动物体的自旋守恒率则分别是

$$\frac{dS^\mu}{d\tau} = 0 \rightarrow \frac{DS^\mu}{d\tau} = 0 \quad (2.1.44)$$

前者指物体不受任何外力矩的情况(见式(1.3.54)),后者则是在引力场中的守恒律(详见 7.2.2 节)。

4. 能量动量张量及其守恒律

物质体系的能量动量张量的定义式(1.3.30)在引力场中仍然成立,但平直空间的能量动量守恒率式(1.3.34)在引力场中应该变成

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0 \rightarrow \nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0 \quad (2.1.45)$$

后式是能量动量张量的绝对散度,由式(2.1.33)的第 4 式给出。因为 $T^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} T_{\alpha\beta}$, 利用度规张量绝对导数的性质式(2.1.34), 可知

$$\nabla_\nu T_{\mu\nu} = 0, \quad (\nabla^\nu = g^{\mu\nu} \nabla_\mu) \quad (2.1.46)$$

5. 光波相位及波阵面方程

光波相位的定义式(1.4.6)在引力场中也成立,平直空间的波阵面方程式(1.4.7)在引力场中则是

$$\eta^{\alpha\beta} \frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha} \frac{\partial\varphi}{\partial x^\beta} = 0 \rightarrow g^{\alpha\beta} \frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha} \frac{\partial\varphi}{\partial x^\beta} = 0 \quad (2.1.47)$$

由于相位是标量,偏导数算符不变。前者表示光波沿直线传播,后者表明光的传播路径是弯曲的,取决于传播路径上的引力场分布。

2.2 球对称天体的引力场

2.2.1 爱因斯坦引力场方程

根据上面的讨论,得出结论:引力场表现为时空的弯曲,它的所有性质由弯曲时空的线元或度规确定。根据度规及其导数,可以求得时空的联络和曲率等几何量,这些量决定了时空弯曲的类型(是欧氏、双曲还是椭圆的)、时空的弯曲程度、不同区域的弯曲变化等。通俗地说,物质越密集的地方引力场越强,时空弯曲得越厉害,不存在任何物质的时空是平直的。对于一个给定的物质分布,在其周围的引力场分布即弯曲时空的度规也就唯一确定,它是通过求解引力场方

程得到的。就好比给定一种电荷分布,求解麦克斯韦方程就可确定电荷周围的电磁场。

根据广义相对性原理,物理规律在不同参考系必须具有相同的形式,因而必须是张量方程,即方程两边应该是同阶张量,能够保证在任意坐标变化下的形式不变,如

$$C_{\mu\nu} = aA_{\mu\nu} + bB_{\mu\nu} \rightarrow C'_{\mu\nu} = aA'_{\mu\nu} + bB'_{\mu\nu}$$

参考牛顿引力场方程(见式(2.1.7))

$$\nabla^2 w = -4\pi G\rho = -\frac{4\pi G}{c^2}\rho c^2$$

爱因斯坦认为引力场方程应该是具有以下形式的张量方程

$$G_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu} \quad (2.2.1)$$

式中: κ 为常数; $T_{\mu\nu}$ 为物质体系能动张量的协变分量,对应于牛顿场方程中的能量密度;方程左边的张量对应于牛顿引力势的 2 阶导数,应该是描述空间弯曲程度的曲率张量,它是度规的 2 阶导数。又因为方程右边满足能动张量守恒律(见式(2.1.46)),故要求左边的张量也满足绝对散度为 0:

$$\nabla^\nu T_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \nabla^\nu G_{\mu\nu} = 0$$

在数学上可以证明,在 2 阶曲率张量组合中只有下式符合这个条件(不考虑宇宙项)

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$$

式中: $R_{\mu\nu}$, R 分别为 Ricci 曲率张量和标量曲率; $G_{\mu\nu}$ 为爱因斯坦张量。当引力场很弱时场方程应该退化为牛顿场方程,从而确定出常数 κ 。最后得到

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\kappa T_{\mu\nu}, \quad \left(\kappa = \frac{8\pi G}{c^4} \right) \quad (2.2.2)$$

这就是著名的爱因斯坦引力场方程。

为了后面的应用,导出场方程的另一种形式。对上式两边乘上 $g^{\mu\nu}$ 后对 μ, ν 求和

$$g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}R = -\kappa g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$$

右边第 1 项为 R (见式(2.1.38)),第 2 项中的 $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = \delta^\mu_\mu = 4$,得到标量曲率正比于能动张量的迹:

$$R = \kappa g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = \kappa T \quad (2.2.3)$$

于是场方程又可表示为

$$R_{\mu\nu} = -\kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) \quad (2.2.4)$$

爱因斯坦引力场方程看起来很复杂,实际上它是牛顿引力场方程的推广,是对引力场的更精确描述。我们将在 3.1.2 节证明,当引力场很弱的情况下爱因斯坦场方程退化为牛顿引力场方程。下面简单说明场方程式(2.2.2)的物理和几何意义。

(1) 场方程左边是描述弯曲时空的曲率张量组合,取决于联络及其导数。由于联络和曲率是度规的 1 阶和 2 阶导数,而度规对应于引力势,联络和曲率就对应于引力场强和场强的导数,可通俗地表示为

$$g_{\mu\nu} \rightarrow w, \quad \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \rightarrow \nabla w, \quad G_{\mu\nu} \rightarrow \nabla^2 w$$

所以场方程左边对应于牛顿引力场方程中的 $\nabla^2 w$ 。

(2) 场方程右边是物质体系的对称能量动量张量,其逆变和协变分量分别是(见式(1.3.30))

$$T^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \rho c^2 & c\sigma^1 & c\sigma^2 & c\sigma^3 \\ c\sigma^1 & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ c\sigma^2 & T^{12} & T^{22} & T^{23} \\ c\sigma^3 & T^{13} & T^{23} & T^{33} \end{bmatrix} \quad (2.2.5)$$

$$T_{\mu\nu} = g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} T^{\alpha\beta} \quad (2.2.6)$$

式中: ρ 、 σ^i 和 T^{ij} 分别为物质体系的质量密度、动量密度和动量流密度。如果考虑一个静止刚体(例如不计自转和公转的地球)的引力场分布,不为 0 的能动张量只有能量密度 $T^{00} = \rho c^2$,在弱场情况下,场方程右边正比于质量密度 ρ ,与牛顿场方程的右边相对应。

综合上面两条,爱因斯坦场方程的基本思想是物质体系的质量分布决定了时空的弯曲状态,或者说时空的几何性质反映了物质的分布状态。如果说狭义相对论将时间和空间统一在一个连续域中,广义相对论则进一步将时间、空间和物质统一起来——这是广义相对论对人类文明的最大贡献。

(3) 引力场方程不能唯一确定 10 个场量 $g_{\mu\nu}$,这是因为场方程虽然有 10 个,但它们满足 4 个恒等式,即能量动量守恒律式(2.1.46),所以要唯一确定场量,必须附加 4 个方程,一般取谐和坐标规范条件

$$\square x^{\mu} \equiv g^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} x^{\mu} = 0, \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \quad (2.2.7)$$

式中

$$\square \equiv g^{\alpha\beta} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta}$$

为弯曲时空的 4 维拉普拉斯算符,是平直时空算符 $\eta^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} \partial_{\beta}$ 的推广(见

式(1.2.26))。凡是满足 $\square f=0$ 的函数称作谐和函数,故 x^μ 称作谐和坐标。

谐和坐标条件也可以用联络来表示。因为坐标是一个标量,其绝对导数与普通导数相同

$$\nabla_\beta x^\mu = \partial_\beta x^\mu = \delta^\mu_\beta \quad (\mu \text{ 固定})$$

为常协变矢量(见式(1.2.25))。由式(2.1.33)的第2式可得

$$\square x^\mu = g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \delta^\mu_\beta = -g^{\alpha\beta} \Gamma^\nu_{\alpha\beta} \delta^\mu_\nu = -g^{\alpha\beta} \Gamma^\mu_{\alpha\beta}$$

故谐和坐标条件也表示成

$$\Gamma^\mu \equiv g^{\alpha\beta} \Gamma^\mu_{\alpha\beta} = 0 \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \quad (2.2.8)$$

(4) 根据场方程和坐标条件,就可以求解引力场分布即时空度规。度规一般是时间和空间的函数,根据度规的函数形式可以将引力场划分为

动态场:度规是时间和空间的函数, $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(t, x^i)$;

稳态场:度规与时间无关, $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^i)$;

静态场:度规与时间无关且时轴正交, $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^i)$, $g_{0i} = 0$ 。

下面将看到,对于太阳系天体的引力场,当考虑自转效应时为稳态场,忽略自转时可以处理为静态场。

2.2.2 史瓦西度规及其牛顿近似

爱因斯坦场方程是度规的2阶非线性偏微分方程,比牛顿场方程复杂得多。为了避免繁琐的张量运算,这里不介绍爱因斯坦场方程的严格求解过程,直接给出球对称天体(例如地球和太阳等)外部的引力场分布,也就是天体外部弯曲时空的度规张量。

爱因斯坦场方程的最简单解是静止的球对称天体周围的引力场,例如,不考虑自转和公转的地球周围引力场。以引力体的质量中心建立球坐标 $\{r, \theta, \phi\}$,史瓦西(Schwarzschild)在1916年也就是广义相对论刚建立不久求出了这个解,通常称作史瓦西度规或史瓦西场

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2w}{c^2}\right)(cdt)^2 - \left(1 - \frac{2w}{c^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2.2.9)$$

式中: $w(r) = \mu/r$ 正是球对称物体产生的牛顿引力势。可见广义相对论包含了牛顿的引力理论,当然,在后面将看到前者要比后者更加精确。

史瓦西度规中不为0的分量是

$$\begin{cases} g_{00} = 1 - \frac{2w}{c^2} & g_{11} = -\left(1 - \frac{2w}{c^2}\right)^{-1} = -\frac{1}{g_{00}} \\ g_{22} = -r^2 & g_{33} = -r^2 \sin^2\theta \end{cases} \quad (2.2.10)$$

由于此度规是球对称的、与时间无关且时空交叉项 $g_{0i} = g_{i0} = 0$,所以史瓦西

时空是球对称静态时空。当 $r \rightarrow \infty$ 时,史瓦西度规退化为闵氏度规,这表明在远离引力源的区域也是平直时空,在广义相对论中将这种情况称作渐近平直时空。显然,如果 $w=0$,即场区没有质量分布,则史瓦西度规也退化为闵氏度规, $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$ 。所以有以下的结论:没有引力的时空是平直的,狭义相对论是正确的;当存在引力时时空是弯曲的,狭义相对论应该推广到广义相对论。

有兴趣的读者可以根据史瓦西度规求出联络及 Ricci 曲率,验证球对称天体周围的真空引力场方程 $R_{\mu\nu}=0$,例如

$$R_{00} = \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \ln g_{00}}{\partial r^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \ln g_{00}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r} \frac{\partial \ln g_{00}}{\partial r} \right] g_{00}^2 = 0,$$

$$R_{11} = -\frac{R_{00}}{g_{00}^2} = 0, \quad R_{22} = 1 - g_{00} - r \frac{\partial g_{00}}{\partial r} = 0, \quad \dots$$

下面讨论史瓦西度规的弱场近似。它是指在引力场较弱的情况下,时空度规 $g_{\mu\nu}$ 可以表示为对闵氏度规 $\eta_{\mu\nu}$ 的微小偏离

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (|h_{\mu\nu}| \ll 1) \quad (2.2.11)$$

定义天体的引力半径或史瓦西半径为

$$R_g = \frac{2\mu}{c^2} = \begin{cases} 8.87 \times 10^{-3} \text{ m} & (\text{地球}) \\ 2.95 \times 10^3 \text{ m} & (\text{太阳}) \end{cases} \quad (2.2.12)$$

它实际上是用长度来度量天体的质量,反映天体周围引力场的强弱。由式(2.2.11)和式(2.2.12)可知在半径为 R 的天体表面

$$h_{00}(R) = g_{00}(R) - 1 = \frac{R_g}{R} \sim \begin{cases} 10^{-9} & (\text{地球}) \\ 10^{-6} & (\text{太阳}) \end{cases}$$

所以地球和太阳周围的引力场满足弱场近似条件。

作坐标变换

$$r = r'(1 + R_g/(4r'))^2$$

则式(2.2.9)变为

$$ds^2 = \left[\frac{1 - R_g/(4r')}{1 + R_g/(4r')} \right]^2 (cdt)^2 - \left(1 + \frac{R_g}{4r'} \right)^4 dl'^2$$

式中: dl' 为坐标 (r', θ, φ) 下的欧氏几何长度。我们主要关心天体外部 ($r \geq R$) 的引力场,由于天体的引力半径远小于实际半径 ($R_g \ll R$),对度规作级数展开后略去 R_g/r' 的高次项,并将 r' 改写成 r ,则有

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2w}{c^2} \right) (cdt)^2 - \left(1 + \frac{2w}{c^2} \right) dl^2 \quad (2.2.13)$$

其度规是

$$\begin{cases} g_{00} = 1 - \frac{2w}{c^2} \\ g_{ij} = -\delta_{ij} \left(1 + \frac{2w}{c^2} \right) \end{cases} \quad (2.2.14)$$

欧氏几何长度在直角坐标 $(x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$ 中表示为

$$dl^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

这就是史瓦西度规的弱场近似,也称作牛顿近似。在 3.1.3 节将看到它与史瓦西度规的 1 阶后牛顿近似(1PN)相同。

2.2.3 克尔度规及其牛顿近似

考虑一个球对称天体作均匀转动,具有确定的角动量 J ,这显然更符合地球、太阳等天体的实际情况。这种物质分布下场方程的解是由克尔(Kerr)在 1963 年得到的,现在一般称作克尔度规或克尔场。

以球对称天体的质量中心为原点、自转轴为 z 轴建立球坐标系 $\{r, \theta, \phi\}$,克尔线元的严格表达式为

$$\begin{aligned} ds^2 = & \left(1 - \frac{2w}{c^2 \Delta} \right) (cdt)^2 - \left(1 - \frac{2w}{c^2} + \frac{a^2}{r^2} \right)^{-1} \Delta dr^2 \\ & - r^2 \Delta d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta \left(1 + \frac{a^2}{r^2} + \frac{R_g a^2 \sin^2 \theta}{r^3 \Delta} \right) d\phi^2 \\ & + \frac{2R_g a \sin^2 \theta}{r \Delta} d\phi (cdt) \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

$$\left(a = \frac{J}{Mc}, \quad \Delta = 1 + \frac{a^2}{r^2} \cos^2 \theta \right)$$

式中: $ac = J/M$ 为引力源单位质量的角动量(比角动量)。在太阳或地球周围有 $a/r < 10^{-5}$,略去含 a^2/r^2 项及更高阶小量,克尔线元可写成

$$\begin{aligned} ds^2 = & \left(1 - \frac{2w}{c^2} \right) (cdt)^2 - \left(1 - \frac{2w}{c^2} \right)^{-1} dr^2 \\ & - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) + \frac{4GJ \sin^2 \theta}{c^3 r} d\phi (cdt) \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

与史瓦西度规比较,式(2.2.16)多出了时空交叉项($g_{03} \neq 0$),表明引力场不是静态和球对称的,但由于度规与 t 和 ϕ 无关,且当 $r \rightarrow \infty$ 退化为闵氏时空,所以克尔度规描述的是以 J 为对称轴的轴对称稳态时空,也是渐近平直时空。

与上节的做法类似,在引力场较弱的情况下,作坐标变换

$$r = r'(1 + R_g/(4r'))^2$$

再将 r' 改写成 r , 得到克尔线元的牛顿近似表达式

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2w}{c^2}\right)(cdt)^2 - \left(1 + \frac{2w}{c^2}\right)dl^2 + \frac{4GJ\sin^2\theta}{c^3 r}d\phi(cdt) \quad (2.2.17)$$

式(2.2.17)右边最后一项是时空交叉项,其度规可化成

$$g_{03} = \frac{2GJ\sin^2\theta}{c^3 r} = \frac{2G|\mathbf{J} \times \mathbf{r}|}{c^3 r^3} r \sin\theta$$

由于 $\mathbf{J} \times \mathbf{r}$ 沿 \mathbf{e}_ϕ 方向,而

$$d\mathbf{r} = dr\mathbf{e}_r + r d\theta\mathbf{e}_\theta + r \sin\theta d\phi\mathbf{e}_\phi$$

故克尔线元近似表达式为

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2w}{c^2}\right)(cdt)^2 - \left(1 + \frac{2w}{c^2}\right)dl^2 + \frac{4G\mathbf{J} \times \mathbf{r}}{c^3 r^3} \cdot d\mathbf{r}(cdt) \quad (2.2.18)$$

式(2.2.18)的优点是对任意坐标系均成立,式中的角动量 \mathbf{J} 并不一定沿 z 轴方向。在直角坐标下的克尔度规表示为

$$\begin{cases} g_{00} = 1 - \frac{2w}{c^2} \\ g_{ij} = -\delta_{ij}\left(1 + \frac{2w}{c^2}\right) \\ g_{0i} = \frac{4w^i}{c^3} \end{cases} \quad (2.2.19)$$

式中

$$\mathbf{w} = \frac{G\mathbf{J} \times \mathbf{r}}{2r^3} \quad (2.2.20)$$

是引力场的矢量势(详见 3.1.4 节)。在 3.1.3 节将看到,克尔度规的牛顿近似与 2 阶后牛顿近似(2PN)的形式基本相同,其中的时空交叉项反映的是引力场的矢量势对引力场的贡献。

我们之所以讨论史瓦西和克尔度规的牛顿近似,不仅因为表达式简单使得计算方便,主要是因为它们满足线性叠加原理,可以建立全局的时空坐标系,这将在第 3 章详细说明。

2.3 引力场中的时间和空间

这里要强调,在广义相对论理论中坐标本身没有测量意义,由于广义相对论

中的参考系是任意的,建立在参考系上的坐标也是任意的。对某个参考系(坐标系),时空坐标 (t, x, y, z) 只是某一个事件的标记,用以区别于其他的事件。 dt 不代表真实的时间间隔, dx, dy, dz 也不是真实的空间间隔。具有测量意义的是用标准钟和标准尺测量的固有时和固有距离。爱因斯坦在回忆建立广义相对论的过程时谈到,要摆脱坐标应该具有直接测量意义的思想束缚是相当困难的,这也可能是广义相对论难以理解的原因之一。

首先解释两个基本概念——局域惯性系和局域静止惯性系。

广义相对论中的“惯性系”与经典力学中使用的概念是有区别的。例如静止于地面的参考系在经典力学中是惯性系,但在广义相对论中并非惯性系。这是因为经典力学将地球的引力看成一种外力,当物体不受引力和其他外力作用时作惯性运动;而广义相对论将引力与时空背景融入一体,不能将其分离开来。但我们可以通过参考系的加速运动来“抵消”引力的作用,也就是在2.1.2节中所定义的,不存在引力效应的参考系就是惯性系。例如爱因斯坦电梯,当它在引力场中作自由落体运动时,电梯内子弹的轨迹或光线为一直线,与惯性系中物理现象无异。再例如我们比较熟悉的围绕地球运动的宇宙飞船,在飞船中的物体不受重力影响,处于“失重”状态。所以爱因斯坦电梯和宇宙飞船才是广义相对论的惯性系。

无论是爱因斯坦电梯还是宇宙飞船只是一个很小的区域,因为在较大范围内不可能完全抵消引力的作用。由此抽象出一个基本概念——局域惯性系,它相对于引力场的加速度等于该处的引力场强,使得加速度效应能抵消引力作用:

$$a(r) = g(r)$$

对于史瓦西或克尔渐近平直时空,在无穷远处引力场消失,可以在此处建立一个惯性系,例如爱因斯坦电梯,然后让它在引力场中作自由落体运动,它所经历的每一点的加速度等于该点的引力场强,这个电梯就是局域惯性系。

爱因斯坦认为,在引力场中每一点必定可以建立一个且只有一个局域惯性系,它相对于引力场的加速度等于该点的引力场强。如果局域惯性系相对于该点静止,则称作局域静止惯性系:

$$a(r) = g(r), \quad v(r) = 0$$

根据定义,局域静止惯性系是相对于某一点或某一粒子而言。如果粒子在引力场中运动,则局域静止惯性系不是固连在它身上,而是在不同点具有不同的局域静止惯性系,因为引力场中不同点的引力场强不相同。不难看出,局域静止惯性系相当于狭义相对论中的瞬时惯性系。

2.3.1 坐标时和固有时

在狭义相对论中,静止于惯性系中的时钟所记录的时间就是坐标时,这些时

钟就是坐标钟。但是,静止于引力场中的时钟是不同步的。于是可以设想:在引力场中每一点放置一个可以调整快慢的时钟,在局域惯性系中放置一个标准钟,它所记录的就是惯性系时间,当它从无穷远飞到每一点时与该点的时钟进行对比,并将各个时钟调整到与惯性系时钟的频率相同。这一种被调整后的想象中的“坐标钟”记录的时间就是坐标时。

由此可见,引力场中的坐标时有 3 个特点:

(1) 在引力场的每一点有且仅有一个坐标时,用来度量该点的时间流逝快慢;

(2) 各个点的坐标时保持严格同步,因而能够比较不同点的时间快慢;

(3) 与引力场无关,对于史瓦西和克尔时空,当 $r \rightarrow \infty$ 时引力场消失,这里的时钟记录的时间就是坐标时。

固有时是指引力场中的同一个标准钟对任意两事件时间间隔的真实记录。分为静止固有时和(运动)固有时两种,取决于时钟在引力场中的运动状态。

设静止于史瓦西场中一点 P 发生两个无限邻近的事件 (t, x^i) 和 $(t + dt, x^i)$, 因 $dx^i = 0$, 可知时空间隔为

$$ds^2|_{dx=0} = (cd\tau_0)^2 = g_{00}c^2dt^2$$

即

$$d\tau_0 = dt \sqrt{g_{00}} \quad (2.3.1)$$

这里定义的 $d\tau_0$ (下标“0”表示静止) 就是静止固有时。由式(2.2.10)可知史瓦西时空的静止固有时为

$$d\tau_0 = dt \sqrt{1 - \frac{2w}{c^2}} \quad (2.3.2)$$

式(2.3.2)表明:放置在 P 点时钟的时间与坐标时成正比,但比例系数 $\sqrt{g_{00}}$ 与 P 点的位置有关。对于相同的坐标时间间隔 dt , 在空间不同点时钟的时间间隔 $d\tau_0$ 不相同,即空间不同点的时钟的走时率(钟速)不同步,这就是引力场对时钟的影响。如果引力场消失($w=0$), 放置在不同位置的时钟记录的时间就是坐标时,也就回到狭义相对论的情况。

静止固有时与坐标时的关系可以这样来理解:设想局域惯性系 K 从无穷远处开始沿 r 负向作自由落体运动,在引力场中的加速度为

$$a = \frac{dv}{dt} = -\frac{\mu}{r^2} e_r$$

两边点乘 dr 后积分

$$\int_0^v \frac{dv}{dt} \cdot dr = \int_0^v v dv = - \int_{\infty}^r \frac{\mu}{r^2} dr$$

故局域惯性系 K 到达 P 点时的速度

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} = 2w$$

当 K 到达 P 点时,设想一个局域静止惯性系 K' 从 P 点开始沿 r 负向作自由落体运动,在这一瞬时相对于 P 的速度为 0。在 K 中沿径向放置的两个时钟经过 P 点时记录的时间分别为 t 和 $t + dt$ (坐标时), K' 中的一个时钟记录的时间间隔为 $d\tau_0$ (固有时)。因为 K 和 K' 都是惯性系,可以利用狭义相对论的时间膨胀效应,它们的关系为

$$d\tau_0 = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = dt \sqrt{1 - \frac{2w}{c^2}}$$

又因为 K' 相对于 P 点静止,虽然相对于 P 点存在加速度,但爱因斯坦认为加速度不影响时钟的频率,所以 $d\tau_0$ 也是 P 点时钟记录的时间,故上式与式(2.3.2)相一致。

以上是指空间固定点的时钟,如果时钟在引力场中运动,则还要考虑运动效应。根据间隔不变性,固有时可表示为

$$d\tau = \frac{ds}{c} = dt \left(g_{00} + 2g_{0i} \frac{v^i}{c} + g_{ij} \frac{v^i v^j}{c^2} \right)^{1/2} \quad (2.3.3)$$

式中: $v^i = dx^i/dt$ 为时钟的坐标速度。当引力场消失, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, 则上式退化为狭义相对论中固有时与坐标时的关系式。

对于史瓦西弱场度规

$$ds^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{2w}{c^2} \right) \left[1 - \frac{1 + 2w/c^2}{1 - 2w/c^2} \cdot \frac{v^2}{c^2} \right]$$

定义一个速度

$$V = v \sqrt{\frac{1 + 2w/c^2}{1 - 2w/c^2}} \approx v \quad (2.3.4)$$

则固有时为

$$d\tau = dt \left[\left(1 - \frac{2w}{c^2} \right) \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \right]^{1/2} \approx dt \left(1 - \frac{w}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2} \right) \quad (2.3.5)$$

它与标准钟所在处的引力势以及运动状态有关,分别是引力效应和运动效应。

式(2.3.5)也可以用时间膨胀效应来解释: 设 P 和 Q 是引力场中 r 邻域内的两个固定点,运动时钟经过这两点的时间间隔为 $d\tau$ (固有时),而 P 和 Q 记录的时间是 τ_0 和 $\tau_0 + d\tau_0$ (静止固有时),运动时钟相对于 P 和 Q 的速度为 V ,于是有

$$d\tau = d\tau_0 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2} = dt \left[\left(1 - \frac{2w}{c^2}\right) \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \right]^{1/2}$$

但要说明,狭义相对论的时间膨胀公式只对引力场的一个小区域成立,对相距较大的不同空间点不成立。从这里也可以看出 V 的物理含义,它是用引力场中固定点的静止固有时描述的速度。

注意,运动标准钟的固有时与静止标准钟的固有时不相同

$$cd\tau = ds, \quad cd\tau_0 = ds \Big|_{dl=0}$$

前者为不变量,后者与参考系的选取有关,因为标准钟对某一参考系 S 静止($dl=0$),对另一参考系 S' 不一定静止($dl' \neq 0$)。

2.3.2 原子钟环球飞行实验

上面的分析表明,真实时钟记录的时间与它所处引力场的位置以及运动状态有关,这是广义相对论的一个重要结论。下面来分析一个真实的原子钟环球飞行实验,它也是对上述结论的实验验证。

设在飞机和地面各放置一个相同的原子钟,飞机作环球飞行一周后回到原处与地面钟进行比较。忽略飞机的起飞和降落过程,飞机起飞和回到原处的坐标时间分别为 t_1 和 t_2 ,飞机相对于地面的速度为 v_r ,则

$$2\pi R = v_r(t_2 - t_1) \equiv v_r \Delta t$$

为方便起见,假设地面观测者(O)静止于地球赤道上,径向坐标和速度分别为

$$r_o = R, \quad V_o = \Omega_E R$$

由式(2.3.5)可知地面钟记录的时间为

$$\Delta\tau_o \approx \int_{t_1}^{t_2} \left(1 - \frac{w_o}{c^2} - \frac{V_o^2}{2c^2}\right) dt = \left(1 - \frac{\mu}{c^2 R} - \frac{(\Omega_E R)^2}{2c^2}\right) \Delta t$$

设飞机(F)位于赤道平面且与地球同向(或反向)即向东(或向西)运动,飞行高度为 H ,径向坐标和速度分别为

$$r_f = R + H, \quad V_f = v_r \pm \Omega_E R$$

其中,“+”对应于飞机向东;“-”对应于向西飞行。飞机钟记录的时间

$$\Delta\tau_f = \left(1 - \frac{\mu}{c^2(R+H)} - \frac{(v_r \pm \Omega_E R)^2}{2c^2}\right) \Delta t$$

于是得到飞机钟与地面钟的钟差

$$\begin{aligned}\delta\tau &= \Delta\tau_f - \Delta\tau_o \\ &= \Delta t \left[\frac{\mu}{c^2} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+H} \right) - \frac{v_r^2 \pm 2v_r\Omega_E R}{2c^2} \right] \\ &\approx \frac{2\pi R}{c^2 v_r} \left[gH - \frac{v_r}{2} (v_r \pm 2\Omega_E R) \right]\end{aligned}$$

最后一步用到 $g \approx \mu/R^2$ 。上式右边第 1 项为引力效应,是由于飞机所在处的引力场小于地面引力场产生的,它导致飞机钟比地面钟快一些,后面两项是由于飞机钟与地面钟的相对运动引起的运动效应,总效应取决于二者的综合结果。

取飞机的飞行高度 $H = 20\text{km}$,相对地面的速度 $v_r = 500\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$,赤道上固定点的速度约为 $\Omega_E R = 465\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$,其他数据见附录。计算出飞机向东(E)飞行时与地面钟的钟差

$$\delta\tau^{(E)} = 175 - 318 = -143\text{ns}$$

其中,引力效应和运动效应导致的钟差分别为 175ns 和 -318ns ,总的效应是飞机钟要比地面钟缓慢。而当飞机向西(W)飞行时的钟差为

$$\delta\tau^{(W)} = 175 + 96 = 271\text{ns}$$

与上面情况不同的是运动效应产生钟差为 $+96\text{ns}$,这是由于飞机钟速度小于地面钟速度($v_r - \Omega_E R < \Omega_E R$)。

上述结论已经为实验所证实。1971 年,美国科学家 Hafele 和 Keating 进行了著名的原子钟环球飞行实验,表 2.3.1 是他们所做实验的理论计算值和实验值,在误差范围内二者相符。1976 年,美国航空航天局(National Aeronautics and Space Administration, NASA)实施了“引力探测器 A”(gravity probe A, GP-A)计划,将一台氢原子钟发射到 10000km 的太空,在更高精度内证实了该效应。

表 2.3.1 原子钟环球飞行实验

	东	西
引力效应/ns	144 ± 14	179 ± 18
运动效应/ns	-184 ± 18	96 ± 10
总效应/ns	-40 ± 23	275 ± 21
实验值/ns	-59 ± 10	273 ± 21

这个效应还说明一个问题:利用相对于地面运动的时钟(例如飞机或卫星携带时钟)来校准或调整地面上的时钟是不可能的。因为卫星钟与地面钟的钟差 $\delta\tau$ 不仅取决于卫星的高度和速度,还与它的运动路径有关。

2.3.3 坐标长度和固有长度

当建立空间坐标系 $\{x, y, z\}$ 后,空间的每一点对应于一个空间坐标。两个邻

近点 (x, y, z) 和 $(x + dx, y + dy, z + dz)$ 的欧氏几何长度定义为它们的坐标长度

$$\begin{aligned} dl &= (dx^2 + dy^2 + dz^2)^{1/2} \\ &= (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

在一般引力场中上式仅对一点的局部邻域有意义,不过在弱场情况下,可以建立整体坐标系,这时才可以用同一坐标对任意大范围距离进行相同的度量。

由于引力场中的不同点所受的引力强度不同,需要有一个不受引力影响的尺来作为度量的标准,这就是静止于惯性系中的尺。将标准尺放置于局域惯性系中,当它经过引力场的每一点时,用标准尺对该点的尺子进行调整,各点的尺子就是同一标准了。

与狭义相对论的情况相似,广义相对论的固有长度是指静止观测者测量引力场中的两个固定点 P_1 和 P_2 的真实长度 dL 。对于任意时轴正交($g_{0i} = 0$)时空,固有长度与坐标长度的关系为

$$dL = \sqrt{-ds^2} \Big|_{dt=0} \quad (2.3.7)$$

在史瓦西场中的固有长度为

$$dL = dl \sqrt{1 + \frac{2w}{c^2}} \quad (2.3.8)$$

这就是史瓦西场中用标准尺测量的固有长度 dL 与坐标长度 dl 的关系。

上述情况是对一个小区域内的空间间隔而言,当度规与时间无关时($g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^i)$)可以直接对空间积分。在牛顿近似下,空间任意两点 $P_1(\mathbf{r}_1)$ 和 $P_2(\mathbf{r}_2)$ 的固有长度为

$$\begin{aligned} \Delta L &= \int_{r_1}^{r_2} \left(1 + \frac{2w}{c^2}\right)^{1/2} dl \approx \int_{r_1}^{r_2} \left(1 + \frac{\mu}{c^2 r}\right) dl \\ &= |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| + \frac{\mu}{c^2} \ln \frac{r_2 + \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{n}}{r_1 + \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{n}} \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

式中:单位矢 $\mathbf{n} = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) / |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$,第2项正是空间弯曲的表现。显然,固有距离并不等于两点的欧氏几何距离 $|\Delta \mathbf{r}|$,正因为如此,我们说引力导致空间弯曲。

下面从测量的角度来分析固有长度的物理意义。

图 2.3.1 中的 γ_0 是静止观测者世界线,设在点 $P_1(t_1, \mathbf{r})$ 向邻域内另一点 $P_2(t_2, \mathbf{r}_2)$ 发射光波,然后反射回到 $P_3(t_1 + \delta t, \mathbf{r}_1)$, P_1 和 P_3 的空间位置不变。因为类光事件的时空间隔为 0,即

$$\left(1 - \frac{2w}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2w}{c^2}\right) (d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}) = 0$$

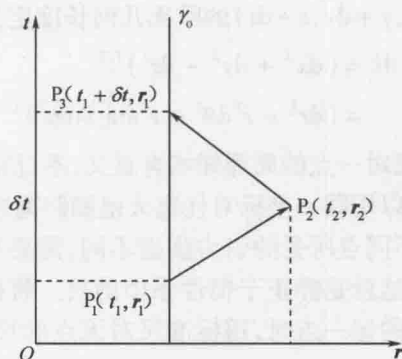


图 2.3.1 静止观测者测量的长度

光波由 P_1 到 P_2 过程的时空坐标间隔为 $dt = t_2 - t_1$, $dr = r_2 - r_1$, 由 P_2 到 P_3 过程的时空坐标间隔取 $dt = t_1 + \delta t - t_2$, $dr = r_1 - r_2$, 将上述条件分别代入上式后相加

$$c\delta t \sqrt{1 - \frac{2w}{c^2}} = 2dl \sqrt{1 + \frac{2w}{c^2}}$$

设静止观测者测量 P_1P_2 的空间距离为 dL , 则光传播的距离为 $P_1P_2 + P_2P_3 = 2dL$, 而 $P_1(P_3)$ 的静止标准钟测量的时间间隔为 $\delta\tau_0 = \sqrt{g_{00}}\delta t$, 所以有

$$dL = \frac{c\delta\tau_0}{2} = \frac{c\delta t}{2} \sqrt{1 - \frac{2w}{c^2}} = dl \sqrt{1 + \frac{2w}{c^2}}$$

与式(2.3.8)相同。

这里讨论的是静止观测者的固有长度, 2.3.5 节将分析运动观测者对长度的测量。

2.3.4 引力场中的可观测量

上面 3 节讨论了史瓦西场中静止观测者的时间和空间概念, 本节将分析一般引力场中任意观测者的时空测量问题, 它是上面内容的一般化。为明确起见, 下面 3 节中将惯性系的坐标用大写字母表示。

根据爱因斯坦等效原理, 在引力场中的任意一点必定可以引入局域惯性系 K , 局域惯性系必定在引力场中作自由运动。例如, 在地球引力场中, 一个作自由落体且无转动的参考系就是局域惯性系。在局域惯性系 K 的时空坐标和基矢分别为 $(X^a | a=0, 1, 2, 3)$ 和 (e_a) , 再设任意坐标系 S 的时空坐标和基矢分别为 $(x^\mu | \mu=0, 1, 2, 3)$ 和 (e_μ) 。两个相邻时空点的线元和度规张量在两系中分别为

$$ds^2 = \eta_{ab} dX^a dX^b = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.3.10)$$

$$\eta_{ab} = \langle e_a, e_b \rangle, \quad g_{\mu\nu} = \langle e_\mu, e_\nu \rangle \quad (2.3.11)$$

根据任意坐标系 S 与惯性系 K 的坐标变换

$$dX^a = \frac{\partial X^a}{\partial x^\mu} dx^\mu, \quad dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial X^a} dX^a \quad (2.3.12)$$

可得度规张量的变换为

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} \frac{\partial X^a}{\partial x^\mu} \frac{\partial X^b}{\partial x^\nu} \equiv \eta_{ab} E_\mu^a E_\nu^b \quad (2.3.13)$$

$$\eta_{ab} = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial X^a} \frac{\partial x^\nu}{\partial X^b} \equiv g_{\mu\nu} E_a^\mu E_b^\nu \quad (2.3.14)$$

式中的变换系数

$$E_\mu^a = \frac{\partial X^a}{\partial x^\mu}; \quad E_a^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial X^a} \quad (2.3.15)$$

上下标中的希腊字母 μ, ν, \dots 是张量指标; 拉丁字母 a, b, \dots 称作标架指标。来讨论变换系数的几何意义:

(1) 根据微分几何知识, 惯性系 K 的标架可以表示为

$$e_a = \frac{\partial}{\partial X^a} = \frac{\partial x^\mu}{\partial X^a} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = E_a^\mu e_\mu, \quad (a = 0, 1, 2, 3) \quad (2.3.16)$$

故 E_a^μ 表示 K 系基矢量 e_a 在 S 系基矢量 e_μ 上的分量(投影), 每一个基矢量 e_a 由 4 个分量 $(E_a^0, E_a^1, E_a^2, E_a^3)$ 确定。由式(2.3.14)得

$$g_{\mu\nu} E_0^\mu E_0^\nu = \eta_{00} = 1$$

$$g_{\mu\nu} E_i^\mu E_i^\nu = \eta_{ii} = -1, \quad (i = 1, 2, 3)$$

根据矢量的分类(见式(1.2.27)), (E_0^0, E_0^1, \dots) 是类时逆变矢量, 而 (E_i^0, E_i^1, \dots) 是类空逆变矢量。可见, 局域惯性系的基矢量可以等价的用这 4 个矢量来表示, 将这 4 个矢量构成的集合 $\{E_a^\mu | a = 0, 1, 2, 3\}$ 称作 4-标架。

(2) 由变换系数定义式可得

$$E_a^\mu E_\mu^b = \delta_a^b, \quad E_a^\mu E_\nu^a = \delta_\nu^\mu \quad (2.3.17)$$

前一式表明 E_a^μ 对于张量指标 (μ, \dots) 是正交归一的, 称作正交归一条件, 因此 4-标架也是正交标架; 后一式表明 E_a^μ 对于标架指标 (a, \dots) 也是正交归一的, 称作完备性条件, 完备的意思是任意的矢量或张量都可以用正交标架展开, 如下面的式(2.3.20)。

(3) 分量 E_a^μ 和 E_μ^a 可通过度规张量进行转换。对式(2.3.14)两边同乘 η^{ac} 对 a 求和, 则有

$$\eta^{ac} g_{\mu\nu} E_a^\mu E_b^\nu = \eta^{ac} \eta_{ab} = \delta_b^c$$

再乘 E_λ^b 对 b 求和并利用式(2.3.17)得

$$E_\lambda^c = \delta_b^c E_\lambda^b = \eta^{ac} g_{\mu\lambda} E_a^\mu \quad (2.3.18)$$

同理可得到反变换,即

$$E_a^\mu = \eta_{ab} g^{\mu\nu} E_\nu^b \quad (2.3.19)$$

这两式表示标架指标和张量指标的升降分别由闵氏度规 η_{ab} ($=\eta^{ab}$) 和黎曼度规 $g_{\mu\nu}$ ($g^{\mu\nu}$) 进行。例如式(2.3.19)可以看成 η_{ab} 将协变矢量 E_ν^b 的标架指标下降 ($b \rightarrow a$), $g^{\mu\nu}$ 将张量指标提升 ($\nu \rightarrow \mu$), 从而得到逆变矢量 E_a^μ 。

下面来看观测量的意义。如果要测量运动物体的某个物理量,应该指明观测者的运动状态或参考系。在狭义相对论中惯性系与坐标系是同一的,因而对特定的观测者,坐标量也是可观测量。例如相对于物体静止的观测者或瞬时惯性系测量物体的运动时间是固有时间,运动观测者或惯性系测量的是该系中坐标钟记录的坐标时间。但是在广义相对论中,参考系(观测者)与坐标系并不等同。坐标量本身并不具有明确的物理意义,例如4维时空矢量 dx^μ ,表示两事件的时空坐标(x^μ)与($x^\mu + dx^\mu$)的差值,并不表示两事件的真实时间间隔是 dt 、空间距离是(dx^i)。坐标量对任意观测者相同,且与坐标系的选择有关,因此坐标量不是可观测量,观测量应该是与坐标变换无关的标量。

以观测者为基础建立正交标架 $\{E_a^\mu | a=0,1,2,3\}$, 根据完备性条件,对于任意一个逆变矢量 z^μ ,可以将其在正交标架上展开为

$$z^\mu = Z^a E_a^\mu \quad (2.3.20)$$

式中: Z^a 为逆变矢量在标架上的投影。利用正交归一条件可得

$$Z^a = Z^b \delta_b^a = Z^b E_b^\mu E_\mu^a = z^\mu E_\mu^a \quad (2.3.21)$$

我们说, Z^a 是可观测量而 z^μ 不是。这是因为在坐标变换 (x^μ) \rightarrow (x'^μ) 下,矢量和标架的变换分别为

$$z^\mu \rightarrow z'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} z^\alpha$$

$$E_\mu^a \rightarrow E'^a_\mu = \frac{\partial X^a}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} \frac{\partial X^a}{\partial x^\beta} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} E_\beta^a$$

可知

$$\begin{aligned} Z'^a &= z'^\mu E'^a_\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} z^\alpha \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} E_\beta^a \\ &= \delta_\alpha^\beta z^\alpha E_\beta^a = z^\beta E_\beta^a = Z^a \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

与坐标变换无关,所以 Z^a 是可观测量。显然, $Z_a = \eta_{ab} Z^b$ 也是可观测量。

2.3.5 引力场中的时空测量

设两个事件的时空坐标为 $P(x^\mu)$ 和 $Q(x^\mu + dx^\mu)$, 其中的 dx^μ 为逆变矢量。如果观测者的正交系为 $\{E_a^\mu\}$, 根据式(2.3.21), 时间和空间的测量值应为

$$dX^a = dx^\mu E_\mu^a, \quad (a = 0, 1, 2, 3) \quad (2.3.23)$$

或者明确写成

$$\begin{cases} cdT = dx^\mu E_\mu^0, \\ dX^i = dx^\mu E_\mu^i, \quad (i = 1, 2, 3) \end{cases} \quad (2.3.24)$$

设观测者的4维速度的逆变分量为 u^μ , 以此矢量为正交标架的第0轴逆变矢量

$$E_0^\mu = \frac{u^\mu}{c} = \frac{dx_o^\mu}{cd\tau_o} \quad (2.3.25)$$

式中: 下标“o”为观测者, 注意 $dx_o^\mu \neq dx^\mu$, $d\tau_o \neq d\tau$ 。由式(2.3.18)可知第0轴协变矢量为

$$E_\mu^0 = \eta^{0b} g_{\mu\nu} E_b^\nu = g_{\mu\nu} E_0^\nu = \frac{1}{c} g_{\mu\nu} u^\nu$$

代入式(2.3.24)得到两事件时间间隔的测量值

$$dT = \frac{1}{c^2} g_{\mu\nu} u^\mu dx^\nu = \frac{1}{c^2} u_\nu dx^\nu \quad (2.3.26)$$

设正交标架的第 i 轴逆变矢量为 $(E_i^\mu | i = 1, 2, 3)$, 则第 i 轴协变矢量为

$$E_\mu^i = \eta^{ib} g_{\mu\nu} E_b^\nu = -g_{\mu\nu} E_i^\nu$$

由式(2.3.24)可得

$$dX^i = -g_{\mu\nu} dx^\mu E_i^\nu \quad (2.3.27)$$

所以两事件的空间长度 dL 的测量值

$$\begin{aligned} dL^2 &= \delta_{ij} dX^i dX^j \\ &= \delta^{ij} (g_{\mu\alpha} dx^\mu E_i^\alpha) (g_{\nu\beta} dx^\nu E_j^\beta) \\ &= (E_0^\alpha E_0^\beta - \eta^{ab} E_a^\alpha E_b^\beta) g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} dx^\mu dx^\nu \\ &= \left(\frac{u^\alpha u^\beta}{c^2} - g^{\alpha\beta} \right) g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} dx^\mu dx^\nu \end{aligned}$$

注意到度规的性质 $g^{\alpha\beta} g_{\mu\alpha} = \delta_\mu^\beta$ 以及 $u_\mu = g_{\mu\alpha} u^\alpha$, 得到

$$dL^2 = \left(\frac{u_\mu u_\nu}{c^2} - g_{\mu\nu} \right) dx^\mu dx^\nu \quad (2.3.28)$$

上面几式的几何意义可以用图 2.3.2 简单说明:

(1) 设观测者的世界线为 $\gamma_0(\tau_0)$, 世界线弧长 τ_0 为观测者的固有时间, 切矢量 u^μ 是观测者的 4 维速度矢量。

(2) 式(2.3.25)表示将世界线的切矢量取为正交标架的第 0 轴 E_0^μ , 即在空间轴上的分量为 0, 这表明观测者相对于参考系静止。又因为此标架中的度规是闵氏的, 即为惯性参考系, 故此标架是观测者的局域静止惯性系。

(3) 两相邻时空点 $P(x^\mu)$ 和 $Q(x^\mu + dx^\mu)$ 的时空间隔 dx^μ 也是一个 4 维矢量, 式(2.3.26)表示将它投影到 E_0^μ 即 u^μ/c 上, 即为观测者测量的时间间隔 dX^0 。式(2.3.27)表示将它投影到 E_i^μ , 即为观测者测量的空间间隔 dX^i 。

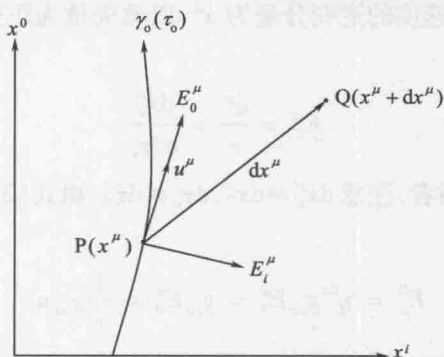


图 2.3.2 引力场中的时空测量

式(2.3.26)和式(2.3.28)表明时间和长度的测量值 dT 和 dL 为标量, 与坐标的选择无关, 取决于下面的 3 个因素:

- (1) 测量对象(dx^μ);
- (2) 观测者的运动状态(u^μ);
- (3) 测量所在时空的几何性质($g_{\mu\nu}$)。

在经典力学和狭义相对论中的测量仅与测量对象和观测者的运动状态有关, 而广义相对论要考虑引力的作用, 它表现为不同时空点的几何性质不同因而测量时间和长度也不相同。

特例: 时轴正交系($g_{0i}=0$)中的静止观测者。他的 3 维速度 $v^i=0$, 因而 4 维速度为

$$u^\mu = \frac{dt}{d\tau}(c, v^i) = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}(c, 0, 0, 0)$$

$$u_\nu = g_{\mu\nu}u^\mu = \sqrt{g_{00}}(c, 0, 0, 0)$$

代入式(2.3.26)和式(2.3.28), 他所测量的时间和长度分别为

$$dT = \sqrt{g_{00}}dt, \quad dL = \sqrt{-g_{ij}dx^i dx^j} \quad (2.3.29)$$

与式(2.3.1)和式(2.3.7)比较,可知上两式正是静止观测者测量的静止固有时 $d\tau_0$ 和固有长度。

对于史瓦西近似度规

$$g_{00} = 1 - \frac{2w}{c^2}, \quad g_{ij} = -\delta_{ij} \left(1 + \frac{2w}{c^2}\right)$$

静止观测者测量的时间和空间间距分别为

$$dT = dt \left(1 - \frac{2w}{c^2}\right)^{1/2}, \quad dL = dl \left(1 + \frac{2w}{c^2}\right)^{1/2} \quad (2.3.30)$$

$dl = \sqrt{\delta_{ij} dx^i dx^j}$ 为欧氏坐标长度,这与式(2.3.2)和式(2.3.8)相同。

2.3.6 光传播的时空测量

由式(2.3.26)可知,式(2.3.28)右边第1部分正是两事件的时间测量值 $c^2 dT^2$,第2部分则是两事件的时空间隔 ds^2 ,所以时间和长度的测量值满足

$$ds^2 = c^2 dT^2 - dL^2 \quad (2.3.31)$$

此式虽然与闵氏时空间隔的形式相同,但却具有完全不同的物理意义。它是指观测者测量两事件的时间 cdT 和长度 dL 的平方差,正好等于两事件的时空间隔或固有时的平方 $ds^2 = c^2 d\tau^2$ 。

如果两事件是由光信号联系的,则时空间隔 $ds^2 = 0$ 。上式表明对于光波的传播,可以根据时间的测量值直接求出长度值,将式(2.3.26)或式(2.3.28)代入上式即得

$$dL = cdT = \frac{1}{c} g_{\mu\nu} u^\mu dx^\nu, \quad (ds^2 = 0) \quad (2.3.32)$$

特例:当不存在引力时, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$,上式退化为

$$dL = cdT = u^0 dt - \frac{1}{c} \delta_{ij} u^i dx^j$$

如果观测者静止, $u^\mu = (c, 0, 0, 0)$, 测量光的传播距离(时间)等于坐标距离(时间)

$$dL = cdT = cdt = dl$$

这是经典力学的情况。如果观测者以速度 \mathbf{v}_0 运动,他的4维速度为

$$u^\mu = \gamma_0 (c, \mathbf{v}_0), \quad \gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$$

时空测量值是

$$\begin{cases} dT = \gamma_0 \left(dt - \frac{\mathbf{v}_0 \cdot d\mathbf{r}}{c^2} \right) \\ dL = \gamma_0 \left(dl - \frac{\mathbf{v}_0 \cdot d\mathbf{r}}{c} \right) \end{cases} \quad (2.3.33)$$

读者可以验证,令 $dL = \sqrt{d\mathbf{r}' \cdot d\mathbf{r}'}$, $dl = \sqrt{d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}}$, 上式即为狭义相对论中光传播的洛伦兹变换式(1.1.5)。

现在来看引力场中的光速不变性。光速不变性是狭义相对论的基本原理,那么在引力场中它是否仍然成立呢? 回答是肯定的,但是与狭义相对论的形式不同。由式(2.3.32)可知引力场中光速为

$$c = \frac{dL}{dT} \quad (2.3.34)$$

就是说,对于任意观测者,他所测量光信号的传播距离与时间的比值恒为 c , 与观测者的运动状态和引力场的性质无关。

但是,光子的坐标速度 $v^i = dx^i/dt$ 满足

$$g_{00}c^2 + 2g_{0i}cv^i + g_{ij}v^iv^j = 0$$

由此解出

$$c = \frac{1}{g_{00}} \left[g_{0i}n^i + \sqrt{(g_{0i}g_{0j} - g_{00}g_{ij})n^in^j} \right] v > v \quad (2.3.35)$$

这里已舍去根号前取负号的另一解,式中

$$\mathbf{n} = (n^i) = (v^i/v), \quad (\delta_{ij}n^in^j = 1)$$

是光传播方向单位矢。可见光子的坐标速度与它经历的引力场有关,并且恒小于真空中的光速。例如,史瓦西弱场中的观测者测量的光速为

$$c = v \sqrt{-\frac{g_{11}\delta_{ij}n^in^j}{g_{00}}} = v \sqrt{\frac{1+2w/c^2}{1-2w/c^2}} > v$$

正是因为引力场中光传播的坐标速度小于真空中光速,光子世界线与时间轴夹角

$$\theta = \arctan\left(\frac{v}{c}\right) < \frac{\pi}{4}$$

导致引力场中的光锥比不存在引力时的光锥“瘦”一些,引力场越强光锥越“瘦”。如图 2.3.3 所示(见图 1.2.1),图中假设 P 点的引力场强大于 Q 点的场强。

从表面上看,将光速不变性从平直时空推广到弯曲时空的关键是速度的定义,是将坐标时、坐标长度换成观测者的测量时间和长度 $dt \rightarrow dT$, $dl \rightarrow dL$ 。实际

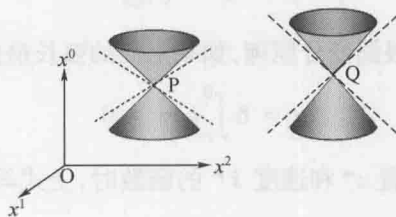


图 2.3.3 引力场中的 3 维光锥

上两种速度的定义都是用运动粒子在各个点的“当地时”和“当地尺”度量的。对于静止于平直时空的惯性观测者,他的世界线与时间坐标线平行,其静止固有时等于坐标时 dt ,固有长度即为坐标长度 dl ,是指“当地时”和“当地尺”,且对不同点具有相同的尺度。所以惯性系中的 3 维速度 v 就是粒子相对于惯性观测者的速度。静止于弯曲时空的观测者是非惯性观测者,他的时钟记录的静止固有时 dT 为“当地时”,他所测量的长度 dL 是用他的尺即“当地尺”度量的,对不同空间点它们不相同;而坐标时 dt 和坐标长度 dl 是相对于他作自由落体运动的惯性系中的时钟和尺子度量的时间和长度。

2.4 引力场中的运动方程及其效应

从应用的角度来看,我们主要关心广义相对论的两类问题:第一类是给定物质分布后的引力场及其时间、空间的测量,如前面 2 节所述;第二类是给定引力场分布后物体在引力场中的运动状态,本节讨论这一类问题。包括质点和光子在引力场中的运动方程和轨迹方程,并分析 3 个典型的运动效应:行星轨迹的进动、光子轨迹的弯曲以及光传播时间的引力延缓效应。这里主要考虑质点和光子在单个引力源产生的静态引力场中的运动状态,在后续内容中将讨论多引力源的稳态引力场中的运动。

2.4.1 弯曲时空的测地线方程

“测地线”即为短程线,是指任意两点连线中距离最短的线,它是平直空间直线的推广。例如球面是一个 2 维弯曲空间,球面上的大圆(通过球心的平面与球面的交线)是短程线,经线是短程线而不在赤道面内的纬线则不是。下面根据短程性导出测地线方程。

设任意 4 维时空的线元(无穷小弧长)为

$$ds = \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} d\tau$$

式中: $\dot{x}^\mu = dx^\mu/d\tau$ 为 4 维速度。时空中任意两个世界点 P、Q 的有限弧长则是

$$s = \int_p^Q L d\tau, \quad L = \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} = c \quad (2.4.1)$$

L 称作拉格朗日函数。根据变分原理, 如果上面的弧长最短, 则有

$$\delta s = \delta \int_p^Q L d\tau = 0$$

当拉格朗日函数仅为位置 x^μ 和速度 \dot{x}^μ 的函数时, 上式等价于以下的拉格朗日方程:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0 \quad (2.4.2)$$

此式实际上就是一般的短程线微分方程, 下面进一步求出具体形式。

对拉格朗日函数求导, 注意 L 是 \dot{x}^μ 的双线性函数, $g_{\mu\nu}$ 仅为 x^μ 的函数, 因而有

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\nu} = \frac{1}{L} g_{\nu\alpha} \dot{x}^\alpha, \quad \frac{\partial L}{\partial x^\nu} = \frac{1}{2L} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta$$

代入拉格朗日方程

$$\begin{aligned} 0 &= g_{\nu\alpha} \ddot{x}^\alpha + \left(\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} \right) \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \\ &= g^{\mu\nu} g_{\nu\alpha} \ddot{x}^\alpha + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} \right) \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \\ &= \ddot{x}^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \end{aligned}$$

第2步用到度规的对称性 $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, 并在方程两边同乘 $g^{\mu\nu}$ 后对 ν 求和; 第3步用到度规的性质 $g^{\mu\nu} g_{\nu\alpha} = \delta_\alpha^\mu$ 。于是得到测地线方程:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \quad (2.4.3)$$

方程左边是粒子的4维加速度, 式中的

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} \right) \quad (2.4.4)$$

正是式(2.1.25)定义的对称联络系数。

测地线方程也可以通过局域惯性系的匀速直线运动经坐标变换得到。在局域惯性系 $K(x'^\mu)$ 中, 匀速直线运动的3维速度为常数 $v'^i = \text{常数}$ 。注意到惯性系中狭义相对论成立

$$\frac{dt'}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}} = \gamma'$$

因而 4 维速度也是常量, $u'^{\nu} = \gamma'(c, v'^i) = \text{const.}$, 故 4 维加速度是

$$\frac{du'^{\nu}}{d\tau} = \frac{d^2 x'^{\nu}}{d\tau^2} = 0$$

利用坐标变换 $dx'^{\nu} = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\alpha}} dx^{\alpha}$, 将上式变换成到任意参考系 $S(x^{\mu})$ 中

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{dx^{\alpha}}{d\tau} \right) = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{d^2 x^{\alpha}}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 x'^{\nu}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} \frac{dx^{\alpha}}{d\tau} \frac{dx^{\beta}}{d\tau} = 0$$

两边乘上 $\partial x^{\mu} / \partial x'^{\nu}$ 后对 ν 求和, 因 $\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\alpha}} = \delta_{\alpha}^{\mu}$, 得到

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2} + \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial^2 x'^{\nu}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} \right) \frac{dx^{\alpha}}{d\tau} \frac{dx^{\beta}}{d\tau} = 0 \quad (2.4.5)$$

式中的系数乃是式(2.1.27)定义的联络:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial^2 x'^{\nu}}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}}$$

上面的推导也表明, 弯曲时空的测地运动与平时时空的惯性运动是同一的, 对于不同的观测者表现为不同的形式。

2.4.2 自由质点运动方程及其牛顿近似

“自由质点”, 在经典力学中是指不受任何外力(包括引力)作用的质点。广义相对论已经将引力几何化, 引力的作用表现为时空的弯曲。因此, 广义相对论中的自由质点虽然也是指不受外力作用, 但这个外力不包括引力, 或者说这里的自由质点对应于经典力学中仅受引力作用的质点。经典力学中的自由质点必定作匀速直线运动, 在 4 维闵氏时空中的世界线是一条直线。由上面的讨论可知, 变换到弯曲时空就是测地线。我们将测地线方程改写成 3 维运动方程。

因为 4 维加速度的空间分量可写成

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d}{dt} \left(\frac{dx^i}{dt} \frac{dt}{d\tau} \right) = \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \frac{d^2 t}{d\tau^2} \frac{dx^i}{dt}$$

利用式(2.4.3)得到 3 维坐标加速度

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^i}{dt^2} &= \left(-\frac{1}{c} \frac{d^2 x^0}{d\tau^2} \frac{dx^i}{dt} + \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} \right) \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{c} \Gamma_{\alpha\beta}^0 \frac{dx^{\alpha}}{dt} \frac{dx^{\beta}}{dt} - \Gamma_{\alpha\beta}^i \right) \frac{dx^{\alpha}}{dt} \frac{dx^{\beta}}{dt} \end{aligned}$$

因为 $dx^0/dt = c, dx^i/dt = v^i$, 上式成为

$$\begin{aligned}\frac{dv^i}{dt} = & -c^2 \Gamma_{00}^i - 2c \Gamma_{0j}^i v^j - \Gamma_{jk}^i v^j v^k \\ & + (c \Gamma_{00}^0 + 2 \Gamma_{0j}^0 v^j + \frac{1}{c} \Gamma_{jk}^0 v^j v^k) v^i\end{aligned}\quad (2.4.6)$$

这是运动方程的 3 维形式,与测地线方程式(2.4.3)等价。在局域惯性系的直角坐标系中,联络系数的所有分量 $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = 0$,因而 3 维加速度 $dv^i/dt = 0$,即匀速直线运动。

既然广义相对论是比牛顿引力定律理论更加精确的引力理论,那么,在弱场情况下上面的运动方程应该退化为牛顿运动方程,下面就来证明之。

由于任意物体的坐标速度必定小于光速, $v < c$,所以上式右边第 1 项的绝对值远大于后面各项,仅保留第 1 项就得到运动方程的牛顿近似:

$$\frac{dv_N^i}{dt} = -c^2 \Gamma_{00}^i \quad (2.4.7)$$

对于史瓦西度规的牛顿近似,不为 0 的度规是

$$g_{00} = \frac{1}{g^{00}} = 1 - \frac{2w}{c^2}, \quad g_{ii} = \frac{1}{g^{ii}} = -\left(1 + \frac{2w}{c^2}\right)$$

根据式(2.4.4)求得联络系数

$$\Gamma_{00}^i = -\frac{1}{2} g^{ii} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i} \approx -\frac{1}{c^2} \frac{\partial w}{\partial x^i}$$

于是式(2.4.7)成为

$$\frac{dv_N^i}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x^i} \quad (2.4.8)$$

其矢量形式为

$$\frac{d\mathbf{v}_N}{dt} = \nabla w \quad (2.4.9)$$

此即引力场中的牛顿运动方程式(2.1.3),它是广义相对论运动方程的近似情况。

2.4.3 史瓦西场中质点轨迹和进动效应

因为在有心力场中只需考虑平面运动,在史瓦西度规式(2.2.9)中取 $\theta = \pi/2$,令 $(x^0, x^1, x^2) = (ct, r, \phi)$,则 3 维史瓦西时空的线元为

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2w}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2w}{c^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\phi^2 \quad (2.4.10)$$

度规张量是

$$g_{00} = \frac{1}{g^{00}} = G(r), \quad g_{11} = \frac{1}{g^{11}} = -G(r)^{-1}$$

$$g_{22} = \frac{1}{g^{22}} = -r^2, \quad \left(G(r) \equiv 1 - \frac{2w(r)}{c^2} \right)$$

根据式(2.4.4)求得不为0的联络系数

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \frac{G'}{2G}, \quad \Gamma_{00}^1 = \frac{GG'}{2}, \quad \Gamma_{11}^1 = -\frac{G'}{2G}$$

$$\Gamma_{22}^1 = -Gr, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \quad \left(G' \equiv \frac{dG}{dr} \right)$$

在测地线方程式(2.4.3)中取 $\mu=0$ 和2,则有

$$0 = \frac{d^2 x^0}{d\tau^2} + 2\Gamma_{01}^0 \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^1}{d\tau}$$

$$= \frac{d^2(ct)}{d\tau^2} + \frac{G'}{G} \frac{d(ct)}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} = \frac{c}{G} \frac{d}{d\tau} \left(G \frac{dt}{d\tau} \right)$$

$$0 = \frac{d^2 x^2}{d\tau^2} + 2\Gamma_{12}^2 \frac{dx^1}{d\tau} \frac{dx^2}{d\tau}$$

$$= \frac{d^2 \phi}{d\tau^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{d\tau} \left(r^2 \frac{d\phi}{d\tau} \right)$$

由此得到两个一次积分

$$\begin{cases} E = c^2 \left(1 - \frac{2w}{c^2} \right) \frac{dt}{d\tau} \\ J = r^2 \frac{d\phi}{d\tau} \end{cases} \quad (2.4.11)$$

积分常数 J 为单位质量粒子的角动量; E 为单位质量粒子在引力场中的能量,因为当 $r \rightarrow \infty$ 时引力场消失,式(2.4.11)的第1式退化为

$$E = c^2 \frac{dt}{d\tau} = \frac{c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

此即狭义相对论中单位质量粒子的能量表达式。故上两式分别是相对论中粒子的能量守恒和角动量守恒定律,不同于经典力学中的相应定律。

在式(2.4.3)中取 $\mu=1$ 可以得到第3个方程,不过直接采用式(2.4.10)可以避免出现2阶导数,来得更为简单。将该式两边同除 $d\tau^2$,则成为

$$c^2 = c^2 \left(1 - \frac{2w}{c^2}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(1 - \frac{2w}{c^2}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2$$

利用式(2.4.11)化简,并作变量替换 $u = 1/r$,则有

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 = \frac{E^2 - c^4}{c^2 J^2} + \frac{2\mu}{J^2}u + \frac{2\mu}{c^2}u^3$$

然后对 ϕ 微分,得

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{\mu}{J^2} + \frac{3\mu}{c^2}u^2 \quad (2.4.12)$$

这就是史瓦西场中自由粒子运动轨迹的微分方程。

式(2.4.12)右边第2项为一小量,去掉该项后退化为经典力学中的轨迹方程即 Binet 公式。因此可采用迭代法求方程的近似解,将 Binet 公式(见式(3.4.5))作为方程的零级近似解:

$$u_N \equiv \frac{1}{r_N} = \frac{\mu}{J^2}(1 + e\cos\phi) \quad (2.4.13)$$

代回式(2.4.12)右边,则该式变成

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{\mu}{J^2}[1 + 3k^2(1 + e\cos\phi)^2], \quad \left(k = \frac{\mu}{cJ}\right)$$

上式的通解为

$$u = \frac{\mu}{J^2} \left[1 + e\cos\phi + 3k^2 \left(1 + e\phi\sin\phi + \frac{e^2}{2} \left(1 - \frac{1}{3}\cos 2\phi \right) \right) \right] \quad (2.4.14)$$

我们比较关心 $e < 1$ 的椭圆运动情况,这时可以略去小于 e^2 的高次项,最后得到椭圆运动方程的1级近似解

$$\begin{aligned} u &= \frac{\mu}{J^2} [1 + e\cos\phi + 3k^2(1 + e\phi\sin\phi)] \\ &\approx \frac{\mu}{J^2} [1 + e\cos(1 - 3k^2)\phi + 3k^2], \quad (e < 1) \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

由于 $\phi = 0$ 时 u 最大,故 ϕ 以近星点为初始点。

广义相对论与经典力学解的区别表现在两方面:

(1) 式(2.4.15)右边最后一项反映相对论轨迹与经典轨迹的径向偏差,对于圆轨道($e = 0$),径向距离与经典轨迹径向距离 r_N 的关系是

$$r = \frac{J^2}{\mu}(1 - 3k^2) = r_N - 1.5R_g, \quad (e = 0) \quad (2.4.16)$$

(2) 对于相同的矢径对应的角度不相同。经典力学解中近星点的角度为

$\phi_N = 2n\pi (n=0,1,2,\dots)$,而在广义相对论解的角度是

$$\phi = 2n\pi[1 - 3k^2]^{-1} \approx 2n\pi + 6n\pi k^2$$

上式右边第2项是一小量,可以采用经典力学的结论,根据行星运动经典定律(见式(3.4.6)、式(3.4.8)):

$$J^2 = \mu a(1 - e^2) = \frac{\mu^2(1 - e^2)P^2}{(2\pi a)^2}$$

其中, a 和 P 为经典椭圆的半长轴和周期,得到1个周期($n=1$)内的角度差

$$\delta\phi = 6\pi k^2 = \frac{6\pi\mu^2}{c^2 J^2} = \frac{24\pi^3 a^2}{c^2 P^2 (1 - e^2)} \quad (2.4.17)$$

这表明行星的椭圆轨迹不是固定的,近星点绕引力源以角速度 $\delta\phi/P$ 在轨道平面内转动,这种现象称为进动, $\delta\phi$ 是1个周期内的进动角,如图2.4.1所示, P 和 P' 是椭圆轨迹近星点。

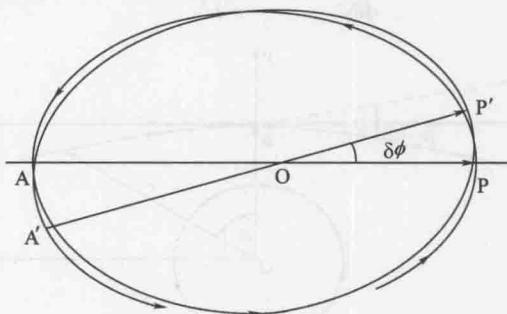


图 2.4.1 行星轨迹的进动

在太阳系行星中,水星绕日运动的近日点进动效应比较明显。它的半长轴、周期和偏心率分别

$$a = 0.38709893 \text{ AU}, \quad P = 87.9693 \text{ d}, \quad e = 0.2056$$

根据上式求出100年的进动角是 $43.03''$,实验观测值则是 $42.56 \pm 0.94''$,理论与实验值符合得非常好。水星的进动现象是 Le Verrier 在1859年首先发现的,牛顿引力理论对此一直无法解释,爱因斯坦本人在1916年用广义相对论得到了正确结论,圆满解决了这一重大疑难问题。对于地球而言,进动值较小,100年的进动角仅为 $3.8''$ 。

2.4.4 史瓦西场中光子轨迹和弯曲效应

在狭义相对论中有一个光行差效应,即观测者接收到的光的传播方向与光源发射的方向不同,这是由于光源相对于观测者运动产生的。但这里讨论的光的引力弯曲,是由于引力场的空间弯曲引起的,二者存在本质区别。

对光波而言 $d\tau^2 = 0$, 由式(2.4.11)可知 $J \rightarrow \infty$, 因而式(2.4.12)成为

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{3\mu}{c^2} u^2 \quad (2.4.18)$$

此即光子轨迹的微分方程。

因为式(2.4.18)右边为一小量, 可采用迭代法求解。当式(2.4.18)右边为0时的通解是

$$u^{(0)} = \frac{\cos\phi}{b}$$

式中: b 为光线到引力源中心的垂直距离, 称作碰撞参数或瞄准距离。这是一个直线方程, 在无穷远处 $r = \infty$ ($u = 0$), $\phi = \pm \pi/2$, 如图 2.4.2 所示。将上式看成 0 级近似解代回到式(2.4.18)的右边

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{3\mu}{c^2 b^2} \cos^2 \phi$$

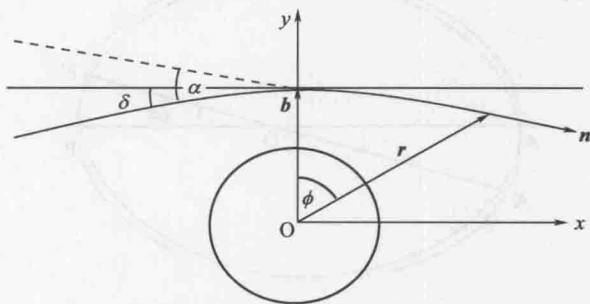


图 2.4.2 光传播路径的引力弯曲

则它有一特解为

$$u^{(1)} = \frac{\mu}{c^2 b^2} (1 + \sin^2 \phi)$$

故 1 级近似解是上面两解之和

$$u = \frac{\cos\phi}{b} + \frac{\mu}{c^2 b^2} (1 + \sin^2 \phi) \quad (2.4.19)$$

这就是史瓦西场中光子的轨迹方程式。

当 $r = \infty$ ($u = 0$) 时, $\phi = \pm(\pi/2 - \delta)$, 代入式(2.4.19)则有

$$\sin\delta = \frac{\mu}{c^2 b} (\cos^2 \delta + 1) \approx \frac{R_g}{b}$$

由此得到光线的偏转角

$$\alpha \approx 2\sin\delta = \frac{2R_g}{b} \quad (2.4.20)$$

1911年,爱因斯坦在《论引力对光传播的影响》中预言了引力导致光传播路径的弯曲,但是计算结果有误。根据式(2.3.34),在史瓦西弱场中光传播的坐标速度应该是

$$v = c \left(\frac{1 - 2w/c^2}{1 + 2w/c^2} \right)^{1/2} \approx c \left(1 - \frac{2w}{c^2} \right)$$

爱因斯坦在他的论文中使用的公式是 $v = c(1 - w/c^2)$, 所以计算的结果是正确值的1/2。但是他的基本思想是正确的,下面按照他的思路给出一个简单的证明。

如图2.4.3所示,根据惠更斯原理,设某一时刻光波处于 r_1 和 r_2 的矢端构成的波阵面上,在 dt 时间内, r_1 和 r_2 处子波面的半径分别为 $v_1 dt$ 和 $v_2 dt$, 由上式可知由于两处的引力势不同导致 $v_1 \neq v_2$, 因而使得光线发生偏转,类似于光在介质表面的折射。在 dt 时间内的偏转角为

$$\begin{aligned} d\alpha &= \frac{(v_2 - v_1) dt}{(r_2 - r_1) / \cos\phi} = -\frac{2}{c} \frac{w_2 - w_1}{r_2 - r_1} \cos\phi dt \\ &= -\frac{2}{c^2} \frac{\partial w}{\partial r} \cos\phi dl = R_g \frac{\cos\phi}{r^2} dl \end{aligned}$$

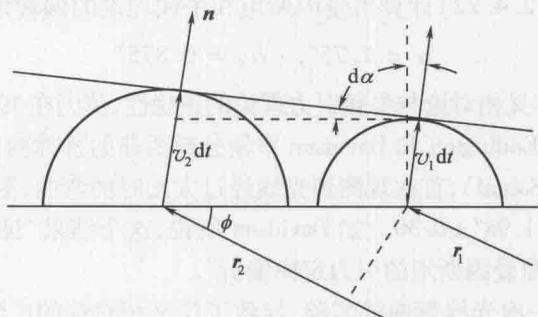


图 2.4.3 爱因斯坦对光线弯曲的论证

利用图2.4.2中的几何关系

$$dl = \frac{rd\phi}{\cos(\phi - \delta)} \approx \frac{rd\phi}{\cos\phi}, \quad r \approx \frac{b}{\cos\phi}$$

求得总偏转角为

$$\alpha = R_g \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\phi}{r^2} dl = \frac{2R_g}{b} \quad (2.4.21)$$

与式(2.4.20)完全一致。

广义相对论是将光的弯曲看成光子在引力场中沿测地线运动,由于引力导致时空弯曲,所以光的轨迹是弯曲的。在牛顿力学中光线也会产生弯曲,其物理机制是由于万有引力的作用,导致光子产生一个指向引力源的加速度,因而偏离初始运动方向。然而根据牛顿力学计算的偏转角却与广义相对论结果不一致。

仍如图 2.4.2 所示,设光波从太阳表面沿 x 方向发射到达地球,在万有引力作用下,光子获得加速度的 y 方向分量为

$$a_y = -\frac{\mu}{r^2} \cos\phi$$

在牛顿力学中光子的速度 $v = dl/dt = c$, 其 y 分量在初始时刻为 0, 在无穷远处为

$$v_y = -\int_0^\infty \frac{\mu \cos\phi}{cr^2} dl = -\frac{\mu}{cb} \int_0^{\pi/2} \cos\phi d\phi = -\frac{\mu}{cb}$$

因此,在牛顿力学中光的偏转角为

$$\alpha_N \approx 2 \left| \frac{v_y}{c} \right| = \frac{R_s}{b} \quad (2.4.22)$$

这个结果刚好是广义相对论的一半。

爱因斯坦的光线弯曲理论得到了实验的证实。设遥远天体的光线经过太阳表面到达地球,取太阳质量和半径分别 $M_s = 1.97 \times 10^{30} \text{ kg}$, $R_s = 6.96 \times 10^8 \text{ m}$, 由式(2.4.21)和式(2.4.22)计算出爱因斯坦和牛顿理论的偏转角分别是

$$\alpha = 1.75'', \quad \alpha_N = 0.875''$$

为了检验和比较广义相对论与牛顿引力理论的正确性,英国在 1919 年 5 月派出两支日食远征队,由 Eddington 和 Davidson 率领分赴西非的普林西比岛(Principe)和巴西的索布拉尔(Sobral),首次观测到光线经过太阳时的弯曲,测量出偏转角分别是 $1.61'' \pm 0.30$ 和 $1.98'' \pm 0.30$ 。如 Davidson 所说,这个结果“证实了爱因斯坦的预言,光线完全按照爱因斯坦的引力定律偏折”。

正是因为这一次光线弯曲的实验,导致了广义相对论的广泛传播,也使得爱因斯坦成为牛顿之后最伟大的科学家。正如当时英国皇家学会会长 Thomson 评价的,“这是自牛顿时代以来取得的关于引力理论的最重要成果,它是人类思想的最崇高成就之一”。甚至有人将这个成果与德国在第一次世界大战中的惨败相提并论,认为“德国在军事和政治上失败后,科学还是取得了伟大的胜利”。尽管这句话明显带有民族主义情绪,但广义相对论对人类社会的贡献是不容抹煞的。

测量光线弯曲的实验后来又进行了多次,所有结果都支持广义相对论的结论。1975 年美国射电天文台对类天体 3C279 观测得到的偏转角为 $1.78'' \pm 0.02$,

与理论值吻合得很好。

2.4.5 光传播时间的引力延缓效应

相对于无引力的平直时空,引力场中光传播的时间延缓是由两个因素决定的,即光传播路径的弯曲和引力对光的坐标速度的影响:在无引力时光子的路径为直线,速度为 c ;在引力场中光子的路径发生弯曲,速度 $v < c$ 。因为后续内容还将详细讨论时间延缓,这里简单将光传播的弯曲路径用两段直线表示,并采用史瓦西场的牛顿近似度规,如图 2.4.4 所示。

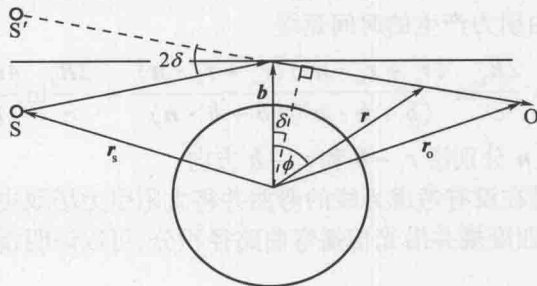


图 2.4.4 光传播时间的引力延缓

在 3 维时空 $\{ct, r, \phi\}$ 中,光子在史瓦西近似度规下的坐标时间间隔为

$$cdt = dl \left(\frac{1 + 2w/c^2}{1 - 2w/c^2} \right)^{1/2} \approx dl \left(1 + \frac{R_g}{r} \right) \quad (2.4.23)$$

式中:坐标长度为

$$dl = \sqrt{dr^2 + r^2 d\phi^2} = \frac{r d\phi}{\cos(\phi - \delta)}$$

对上式沿光的传播路径从 $r_1 \rightarrow r_2$ 积分,得

$$\begin{aligned} c\Delta t &= \int_{r_1}^{r_2} dl + R_g \int_{r_1}^{r_2} \frac{d\phi}{\cos(\phi - \delta)} \\ &= |r_2 - r_1| + R_g \ln [\tan(\phi - \delta) + \sec(\phi - \delta)] \Big|_{r_1}^{r_2} \quad (2.4.24) \end{aligned}$$

由图 2.4.4 的几何关系可知

$$\tan(\phi - \delta) = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{b \cos \delta} \quad \sec(\phi - \delta) = \frac{r}{b \cos \delta}$$

故有

$$\Delta t = \frac{|r_2 - r_1|}{c} + \frac{R_g}{c} \ln \frac{r_2 + r_2 \cdot \mathbf{n}}{r_1 + r_1 \cdot \mathbf{n}} \quad (2.4.25)$$

当 $M=0$ 时光传播时间 $\Delta t = |r_2 - r_1|/c$; 存在引力场时光传播的坐标时间

$\Delta t > |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|/c$, 延迟的时间取决于球对称天体的引力场以及光的传播路径, 这种现象称作光传播时间的引力延缓。

下面讨论雷达回波的引力延缓。在地球上观测者(O)发射光波到某一天体(S)后接收它的回波, 将传播时间看成光波从 $\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{r}_o$ 和 $\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{r}_s$ 的时间之和的 2 倍。根据上式, 从地球发射光波到接收的总时间

$$\Delta t = \frac{2}{c} (|\mathbf{r}_s - \mathbf{b}| + |\mathbf{r}_o - \mathbf{b}|) + \delta t \quad (2.4.26)$$

式中: 第 1 项为无引力时光传播时间(相当于从观测者到 S' 再回到观测者的时间); 第 2 项则由引力产生的时间延缓

$$\delta t = \frac{2R_g}{c} \ln \frac{(r_s + \mathbf{r}_s \cdot \mathbf{n}') (r_o + \mathbf{r}_o \cdot \mathbf{n})}{(b + \mathbf{b} \cdot \mathbf{n}') (b + \mathbf{b} \cdot \mathbf{n})} \approx \frac{2R_g}{c} \ln \frac{4r_s r_o}{b^2} \quad (2.4.27)$$

其中, 单位矢 \mathbf{n}' 和 \mathbf{n} 分别沿 $\mathbf{r}_s - \mathbf{b}$ 和 $\mathbf{r}_o - \mathbf{b}$ 方向。

以上的讨论是在没有考虑光线的弯曲并将太阳引力场取史瓦西牛顿近似的结果, 直接由史瓦西度规并沿光传播弯曲路径积分, 可以证明雷达回波的时间延缓应为

$$\delta t = \frac{2R_g}{c} \left(\ln \frac{4r_s r_o}{b^2} + 1 \right) \quad (2.4.28)$$

注意: 这里的时间 t 是指太阳引力场的坐标时间, 也就是距太阳无穷远处的时钟所记录的时间, 近似等于地球上时钟的固有时。

美国天体物理学家 Shapiro 在 1964 年首先提出设计了雷达回波时间延缓实验, 认为这是“广义相对论的第 4 个检验”(前 3 个实验检验是指上面两节介绍水星近日点进动和光线弯曲以及下节将要介绍的引力红移)。他们于 1968 和 1971 年分别以水星 (Mercury) 和金星 (Venus) 作为观测对象进行测量。取 R_g 为太阳的引力半径, 地球到太阳距离 $r_o = 1.50 \times 10^{11} \text{ m}$, 水星和金星到太阳距离分别为 $r_s = 0.58 \times 10^{11} \text{ m}$ 和 $1.085 \times 10^{11} \text{ m}$, 根据上式计算出回波的时间延缓分别为

$$\delta t_M = 2.40 \times 10^{-4} \text{ s}, \quad \delta t_V = 2.52 \times 10^{-4} \text{ s}$$

而实验的测量结果为

$$\delta t_M \times (0.9 \pm 0.02) \text{ s}, \quad \delta t_V \times (1.02 \pm 0.05) \text{ s}$$

实验与理论值基本相符。Shapiro 等人还在 1977 和 1979 年对到达火星上空的“海盗”火星探测器为观测对象进行测量, 发现时间延缓的理论值和实验值的比值分别为 1.000 ± 0.005 和 1.000 ± 0.001 , 在更高精度内验证了时间延缓效应。有鉴于此, 人们也将光传播时间的引力延缓称作 Shapiro 效应。

2.4.6 光波的引力和多普勒频移

我们知道, 在狭义相对论中, 当光源相对于观测者以速度 \mathbf{v} 运动时, 观测

者接收到的光波频率 f_o 与光源的固有频率 f_s 之间存在多普勒频移(见 1.4.2 节)。在引力场中也存在多普勒频移,除此外还有一种引力频移,下面分别讨论。

设地球引力场中的一固定点 S 向另一点固定点 O 发射两个光信号,时空坐标分别为 (t_s, r_s) 和 $(t_s + dt_s, r_s)$, 在 1PN 度规下, S 点的静止标准钟测量两事件的时间间隔为

$$(d\tau_o)_s = dt_s \sqrt{1 - 2w_s/c^2}$$

在 O 点接收到这两个信号的时空坐标 (t_o, r_o) 和 $(t_o + dt_o, r_o)$, 其固有时和坐标时的关系为

$$(d\tau_o)_o = dt_o \sqrt{1 - 2w_o/c^2}$$

因为引力场不随时间变化,这两个信号传播的坐标时间应该相等

$$t_o - t_s = (t_o + dt_o) - (t_s + dt_s)$$

即有 $dt_o = dt_s$ 。设发射两个光信号的相位分别是 φ 和 $\varphi + d\varphi$, 根据相位不变性, 在 S 点发射与 O 点接收的周波数 $d\varphi$ 相同, 故在 S 和 O 点的频率分别为

$$f_s = \frac{d\varphi}{(d\tau_o)_s}, \quad f_o = \frac{d\varphi}{(d\tau_o)_o}$$

由上面 4 式得到

$$\frac{f_o}{f_s} = \frac{(d\tau_o)_s}{(d\tau_o)_o} = \left(\frac{1 - 2w_s/c^2}{1 - 2w_o/c^2} \right)^{1/2} \quad (2.4.29)$$

如果引力场较弱, 可以作级数展开并略去小于 c^{-2} 的高阶小量, 得到频移因子或频偏为

$$\zeta \equiv \frac{f_o - f_s}{f_s} = \frac{w_o - w_s}{c^2} \quad (2.4.30)$$

可见, 在 O 点接收的光波频率与 S 点发射的频率不相同, 这就是引力频移。分为两种情况: (1) 如果观察者所在处引力势大于光源处引力势 $w_o > w_s$, 即光波的传播顺着引力场方向 $r_s > r_o$, 则 $f_o > f_s$, 发生蓝移现象; (2) 如果 $w_o < w_s$, 即光波逆着引力场方向传播 $r_s < r_o$, 则 $f_o < f_s$, 发生红移。

爱因斯坦曾经应用多普勒效应对引力频移作过通俗证明。他设想一个高为 H 的电梯 S 静止于地球上空, 在电梯的顶端 A 发射光波并由底部的接收机 B 接收。在发射光波的瞬时有一个电梯 S' 以加速度 g 向上运动, 但相对于 S 的速度为 0, 当光波被 B 接收时 S' 与 S 重合, 这时 S' 的速度为

$$v = gt = \frac{gH}{c}$$

根据狭义相对论的多普勒效应,光源与观测者相向运动时,接收到的频率 f' 与发射频率 f_A 的关系为(见式(1.4.9))

$$f' = f_A \left(1 + \frac{v}{c} \right) = f_A \left(1 + \frac{gH}{c^2} \right)$$

爱因斯坦等效原理认为,以加速度 g 逆着引力场运动的参考系与静止于引力场中的参考系等价,所以 S' 与 S 中的接收机 B 接收到频率相同 $f' = f_B$ 。而 A、B 两点的引力势之差 $w_B - w_A = gH$,故有

$$f_B = f_A \left(1 + \frac{w_B - w_A}{c^2} \right)$$

这与式(2.4.30)一致。

地球引力场的引力频移得到了实验的证实。1960年,美国的 Pound 等人在一个高 $H = 22.6\text{m}$ 的塔上发射频率为 f_s 的 γ 射线,在地面接收射线时产生蓝移, $f_o > f_s$ 。根据式(2.4.30)的计算结果是

$$\zeta = -\frac{\mu}{c^2} \left(\frac{1}{R+H} - \frac{1}{R} \right) = \frac{gH}{c^2} = 2.46 \times 10^{-15}$$

式中: R 为地面到地心距离; $g = GM/R^2$ 。实验测得的频移因子则为

$$\zeta = \frac{f_o - f_s}{f_s} = (2.57 \pm 0.26) \times 10^{-15}$$

在误差范围内,理论与实验高度吻合。

引力频移可以通过光子的能量改变来说明。在量子理论中,光子的能量与频率成正比例关系 $E = hf$ 。当光子在引力场中沿场方向运动时,例如光从电梯的顶端向下发射,引力场做功使得光子的能量增加,导致光子的频率增大,故产生蓝移;同理,光子逆引力场运动时,克服引力场做功导致光子的能量和频率减小,是为红移。虽然上述解释与广义相对论的结果相同,但物理机制并不一致。光子解释是认为光子从原子中发射出来后,在引力场中获得(或消耗)能量导致光子的频率发生改变,频移是在后天产生的;而广义相对论则认为光子的频率是由辐射光子的原子的固有时确定的,由于光子诞生时位于不同位置,引力势的差异导致原子的能级间隔 ΔE 不相同,也就是原子的固有时间不同,因而辐射光子的频率不同 $hf = \Delta E$ 。事实上,到目前为止引力频移的物理机制还不清楚,广义相对论与量子力学的结合也没有满意的结果,因此无法对这个问题进行深入讨论。

上面的讨论是指两个空间固定点的频率的比较,如果光源和观测者均在引力场中运动,则频移的情况还要考虑运动效应。这时不仅有引力频移还有多普勒频移,下面分析它们的综合效应。

如图 2.4.5 所示(参考图 1.4.1), γ_s, γ_o 是光源和观测者的世界线。设光源在引力场中的速度为 v_s , 在其邻域发射两个信号的时空坐标分别为 $S_1(t_s, r_s)$ 和 $S_2(t_s + \delta t_s, r_s + \delta r_s)$, 对应的固有时是 τ_s 和 $\tau_s + \delta\tau_s$ 。观测者的速度为 v_o , 接收到这两个信号的时空坐标为 $O_1(t_o, r_o)$ 和 $O_2(t_o + \delta t_o, r_o + \delta r_o)$, 固有时为 τ_o 和 $\tau_o + \delta\tau_o$ 。由式(2.3.5), 光源和观测者固有时间隔之比, 即为引力场中接收和发射频移之比为

$$\frac{f_o}{f_s} = \frac{\delta\tau_s}{\delta\tau_o} = \frac{\delta t_s}{\delta t_o} \left[\frac{(1 - 2w_s/c^2)(1 - V_s^2/c^2)}{(1 - 2w_o/c^2)(1 - V_o^2/c^2)} \right]^{1/2} \quad (2.4.31)$$

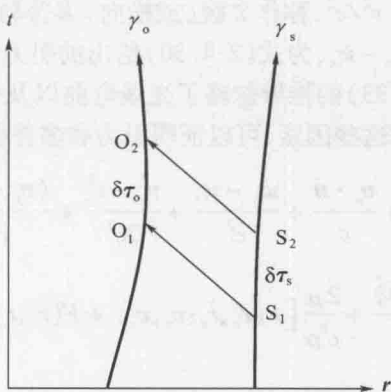


图 2.4.5 引力场中的光传播时空图

由于 $\delta t_s/\delta t_o$ 是阶小量, 可采用经典方法求解。根据图中的几何关系

$$\begin{aligned} c(\delta t_o - \delta t_s) &= |(r_s + \delta r_s) - (r_o + \delta r_o)| - |r_s - r_o| \\ &= \delta t_o V_o \cdot n - \delta t_s V_s \cdot n \end{aligned}$$

式中: n 为光传播方向单位矢

$$n = \frac{r_o - r_s}{|r_o - r_s|} = -\frac{\rho}{\rho} \quad (\rho = r_s - r_o)$$

由此解出

$$\frac{\delta t_s}{\delta t_o} = \frac{1 - V_o \cdot n/c}{1 - V_s \cdot n/c}$$

将上式代入式(2.4.31), 得到

$$\frac{f_o}{f_s} = \frac{1 - \mathbf{V}_o \cdot \mathbf{n}/c}{1 - \mathbf{V}_s \cdot \mathbf{n}/c} \left[\frac{(1 - 2w_s/c^2)(1 - V_s^2/c^2)}{(1 - 2w_o/c^2)(1 - V_o^2/c^2)} \right]^{1/2} \quad (2.4.32)$$

此式即为光波的引力和多普勒频移式。如果不存在引力场 ($w_s = w_o = 0$) 且观测者静止 ($V_o = v_o = 0$), 上式退化为狭义相对论的多普勒频移公式 (1.4.8)。

当引力场较弱时 (例如地球引力场), 可将固有速度表示为坐标速度 $V \approx v$, 并将分母部分作级数展开后略去高阶小量, 频移因子近似为

$$\zeta = \frac{(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_o) \cdot \mathbf{n}}{c} \left(1 + \frac{\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n}}{c} \right) + \frac{v_o^2 - v_s^2}{2c^2} + \frac{w_o - w_s}{c^2} \quad (2.4.33)$$

此式分为 3 个部分:

第 1 部分的量级为 v/c , 取决于光源和观测者沿波矢方向的速度, 称作 1 级 (或径向) 多普勒频移;

第 2 部分的量级为 v^2/c^2 , 称作 2 级 (或横向) 多普勒频移;

第 3 部分取决于 $w_o - w_s$, 为式 (2.4.30) 给出的引力频移。

如上所说, 式 (2.4.33) 的推导忽略了光线弯曲以及引力源的转动导致的时间延缓效应。如果考虑这些因素, 可以证明引力和多普勒频移的严格公式为

$$\begin{aligned} \zeta = & \frac{(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_o) \cdot \mathbf{n}}{c} \left[1 + \frac{\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n}}{c} + \frac{w_o - w_s}{c^2} + \frac{v_o^2 - v_s^2}{2c^2} + \frac{(\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n})^2}{c^2} - \frac{\mu}{c^2 R} - \frac{(\Omega R)^2}{2c^2} \right] \\ & + \frac{w_o - w_s}{c^2} + \frac{v_o^2 - v_s^2}{2c^2} + \frac{2\mu}{c^3 \rho} \left[F(\mathbf{r}_o, \mathbf{r}_s; \mathbf{v}_o, \mathbf{v}_s) + F(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_o; \mathbf{v}_s, \mathbf{v}_o) \right] \end{aligned} \quad (2.4.34)$$

式中: Ω, R 为引力源的角速度和半径, 函数 F 定义为

$$\begin{aligned} F(\mathbf{r}_o, \mathbf{r}_s; \mathbf{v}_o, \mathbf{v}_s) = & \frac{1}{1 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_o / r_o)^2} \left[\left(\frac{\mathbf{r}_o \cdot \mathbf{r}_s}{\rho r_o} - \frac{r_o}{\rho} \right) (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_o) \cdot \mathbf{n} \right. \\ & \left. + \frac{\mathbf{r}_o \cdot (\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_o)}{r_o} + \frac{\mathbf{r}_s \cdot \mathbf{v}_o}{r_o} - \frac{(\mathbf{r}_o \cdot \mathbf{r}_s)(\mathbf{r}_o \cdot \mathbf{v}_o)}{r_o^3} \right] \end{aligned} \quad (2.4.35)$$

它反映了运动效应与引力效应耦合项 (即 \mathbf{v} 与 \mathbf{r} 乘积项) 的影响, 但这些因子都很微小。比较式 (2.4.33) 和式 (2.4.34), 后者多出的项是高阶小量 $O(c^{-3})$, 将其忽略后二者完全一致。

2.4.3 节 ~ 2.4.6 节分别讨论广义相对论的 4 个基本效应, 包括行星轨迹的进动、光线轨迹弯曲、光传播时间延缓及引力和多普勒频移效应, 并且得到了众

多实验的证实。除此以外,广义相对论还预言了测地进动效应和参考系拖曳效应,将在 7.3 节详细介绍这两个效应及其实验证明。

参考文献

- [1] 爱因斯坦 A. 爱因斯坦文集. 许良英, 范岱年, 等译. 北京: 商务印书馆, 2009.
- [2] 费保俊. 相对论与非欧几何. 北京: 科学出版社, 2005.
- [3] 刘辽, 赵峥. 广义相对论(2 版). 北京: 高等教育出版社, 2004.
- [4] 须重明, 吴雪君. 广义相对论与现代宇宙学. 南京: 南京师范大学出版社, 1999.
- [5] Hafele J C, Keating R E. Around-the-world atomic clocks : observed relativistic time gains. *Science*, 1972, 177: 168 - 170.
- [6] Harkins M D. The relativistic Doppler shift in satellite tracking. *Radio Science*, 1979, 14: 671 - 675.
- [7] Michelson A A. The effect of the earth's rotation on the velocity of light I. *ApJ*, 1925, 61: 137.
- [8] Nelson R A. Generalized Lorentz transformation for an accelerated, rotating frame of reference. *J Math Phys*, 1987, 28(10).
- [9] Ohanian H C, Ruffini R. *Gravitation and spacetime*. W W Norton & Company, 1994.
- [10] Shapiro I I. Fourth test of general relativity. *Phys Rev Lett*, 1964, 13 (26): 163 - 174.
- [11] Shapiro I I, Pettengill G H, Stone M L, et al. Fourth test of general relativity: preliminary results. *Phys Rev Lett*, 1968, 20 (22): 1265 - 1269.
- [12] Wald R M. *General relativity*. The University of Chicago Press, 1984.
- [13] Weber J. *General relativity and gravitational waves*. Interscience, New York, 1961.
- [14] Williams J G, Turyshev S G, Boggs D H. Lunar laser ranging science: gravitational physics and lunar interior and geodesy. *Advances in Space Research*, 2006, 37(1): 67 - 71.

第3章 后牛顿引力理论

如果将广义相对论看成动力学理论,它对引力场的描述确实要比牛顿引力定律更加精确。然而,牛顿引力场方程也有比爱因斯坦场方程优越的特性。牛顿引力场方程是2阶线性偏微分方程,场点处的引力势是不同引力源产生的引力势的线性叠加,场点处的引力场是不同引力源产生的引力场的矢量叠加。这对于实际问题的求解是很方便的,例如,在太阳系中,我们可以分别求得地球、月球、太阳和其他行星在场点的引力势,然后进行线性叠加即为实际的引力势。而爱因斯坦场方程关于度规显然是非线性的。如果仅仅考虑一个球对称天体的引力场,使用史瓦西或克尔度规较为精确。但是,实际的引力场分布是多个天体产生的,天体本身也并非球对称或均匀的,这时就不能直接应用史瓦西或克尔度规。

在实际应用中,我们既需要一个比牛顿引力定律更精确的理论,又希望它满足线性叠加原理,本章讨论的广义相对论近似理论就满足这样的条件。我们将证明:近似度规所满足的场方程与牛顿引力场方程的形式类似,应用近似理论的求解方法与牛顿时学基本相同,能够方便地处理太阳系引力场分布和引力场中的运动规律。同时,由于太阳系引力场本来就很弱,本章介绍的近似理论与实际情况的差异极小,完全能够满足现有实验的测量精度。

3.1 引力场的后牛顿近似

为了避开复杂的张量运算,本节的论述主要讲清求解思路、最终结论的物理意义以及实际应用问题,严格计算过程可参阅有关文献。在下面4小节,我们首先给出引力场度规的级数表达形式,求出联络系数、Ricci曲率以及能动张量近似表示,然后代入爱因斯坦场方程,从而得到后牛顿(Post-Newtonian, PN)场方程以及度规、引力标势和矢势的后牛顿表达式。

3.1.1 度规和联络的级数表示

在广义相对论中,弯曲时空的度规和联络相当于引力场的引力势和场强,首先看它们的级数表示。

将弯曲时空线元两边同除 dt^2 , 并令坐标速度 $v^i = dx^i/dt$, 则有

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = c^2 g_{00} + 2c g_{0i} v^i + g_{ij} v^i v^j \quad (3.1.1)$$

注意到史瓦西和克尔度规分量均可写成几项之和,如

$$g_{00} = 1 - \frac{2w}{c^2} = 1 + g_{00}(c^{-2})$$

因此在一般情况下,可以将度规以 c 为参数作负幂次级数展开,即

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(c^0) + g_{\mu\nu}(c^{-1}) + g_{\mu\nu}(c^{-2}) + \dots$$

在引力场较弱($g_{\mu\nu} \sim \eta_{\mu\nu}$)的情况下,只需取前几项即可收敛。

根据式(3.1.1),在作展开时应考虑以下因素:(1) 由于度规 g_{00}, g_{0i}, g_{ij} 前的系数分别为 c^2, c^1, c^0 , 度规展开式的最小量级不能取得相同,如果 g_{00} 取到 c^{-4} , 则 g_{0i} 和 g_{ij} 应分别取到 c^{-3} 和 c^{-2} ; (2) 当 $t \rightarrow -t$ 时, $v^i \rightarrow -v^i$, 根据时间反演不变性, $(ds/dt)^2$ 应保持不变,所以 g_{00} 和 g_{ij} 只能取 c^{-n} 中 n 为偶数的项,而 g_{0i} 应取 n 为奇数的项。

据此,将度规的协变分量展开为

$$\begin{cases} g_{00} = 1 + g_{00}(2) + g_{00}(4) + O(6) \\ g_{ij} = -\delta_{ij} + g_{ij}(2) + O(4) \\ g_{0i} = g_{0i}(3) + O(5) \end{cases} \quad (3.1.2)$$

式中: 括号中的 n 为 c^{-n} 的简写, $g_{\mu\nu}(n) \equiv g_{\mu\nu}(c^{-n})$ 表示度规 $g_{\mu\nu}$ 中量级为 c^{-n} 的项, $O(n)$ 表示量级为 c^{-n} 的高阶小量。这里有一点要说明,如果考虑光子的运动时,由于它的速度 $v \sim c$, 式(3.1.1)中的度规具有相同的量级,这时应将上面的空间度规取到 $g_{ij}(4)$, 即式(3.1.2)中的 g_{ij} 应展开为

$$g_{ij} = -\delta_{ij} + g_{ij}(2) + g_{ij}(4) + O(6)$$

这里暂不考虑,但将在后面直接给出结论。

同样,度规的逆变分量 $g^{\mu\nu}$ 也可展开成式(3.1.2)的形式:

$$\begin{cases} g^{00} = 1 + g^{00}(2) + g^{00}(4) + O(6) \\ g^{ij} = -\delta^{ij} + g^{ij}(2) + O(4) \\ g^{0i} = g^{0i}(3) + O(5) \end{cases}$$

根据度规的逆变和协变分量的关系 $g_{\mu\nu} g^{\nu\sigma} = \delta_\mu^\sigma$, 可将逆变分量用协变分量表示为

$$\begin{cases} g^{00} = 1 - g_{00}(2) - g_{00}^2(2) - g_{00}(4) + O(6) \\ g^{ij} = -\delta^{ij} - g^{ij}(2) + O(4) \\ g^{0i} = g_{0i}(3) + O(5) \end{cases} \quad (3.1.3)$$

再来看联络的级数表示。在 2.4.2 节曾经求得引力场中测地线方程的空间分量(见式(2.4.6)):

$$\begin{aligned} \frac{dv^k}{dt} = & -c^2 \Gamma_{00}^k + c(\Gamma_{00}^0 v^k - 2\Gamma_{0v}^k v^j) \\ & + (2\Gamma_{0j}^0 v^j v^k - \Gamma_{ij}^k v^i v^k) + \frac{1}{c} \Gamma_{ij}^0 v^i v^k \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

由于联络系数 $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ 前的系数分别是 c^2, c^1, c^0, c^{-1} , 所以它们应具有不同的最小量级, 取

$$\Gamma_{00}^k \sim c^{-4}, \Gamma_{00}^0, \Gamma_{0j}^k \sim c^{-3}, \Gamma_{0j}^0, \Gamma_{ij}^k \sim c^{-2}, \Gamma_{ij}^0 \sim c^{-1}$$

在上述精度要求下, 将式(3.1.2)和式(3.1.3)代入联络系数表达式(2.4.4):

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} \right) \quad (3.1.5)$$

得到联络系数的后牛顿近似表示

$$\left\{ \begin{aligned} \Gamma_{00}^k(2) &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}(2)}{\partial x^k} \\ \Gamma_{00}^k(4) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{00}(4)}{\partial x^k} + g_{kj}(2) \frac{\partial g_{00}(2)}{\partial x^j} - 2 \frac{\partial g_{0k}(3)}{\partial x^0} \right) \\ \Gamma_{00}^0(3) &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}(2)}{\partial x^0} \\ \Gamma_{0j}^k(3) &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jk}(2)}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0k}(3)}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{0j}(3)}{\partial x^k} \right) \\ \Gamma_{0j}^0(2) &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}(2)}{\partial x^j} \\ \Gamma_{ij}^k(2) &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}(2)}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}(2)}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}(2)}{\partial x^k} \right) \\ \Gamma_{ij}^0(1) &= 0 \end{aligned} \right. \quad (3.1.6)$$

式中的量级可由度规和微分的量级看出, 注意微分的量级是

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \sim c^{-1}, \quad \frac{\partial}{\partial x^i} \sim c^0$$

例如, $g_{00}(2) \sim c^{-2}$, $\partial/\partial x^0 \sim c^{-1}$, 所以第 3 式的 $\Gamma_{00}^0 = \Gamma_{00}^0(3) \sim c^{-3}$ 。

下面的任务就是确定 4 个度规分量 $g_{00}(2), g_{00}(4), g_{ij}(2), g_{0i}(3)$ 的表达式。

3.1.2 后牛顿近似的场方程和度规

将爱因斯坦场方程式(2.2.4)表示成

$$R_{\mu\nu} = -\kappa S_{\mu\nu} \quad (3.1.7)$$

$$S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \quad (3.1.8)$$

共有 10 个分量方程,下面分步求解。

1. 坐标条件

将式(3.1.3)、式(3.1.6)代入谐和坐标条件式(2.2.8)。

$$g^{\alpha\beta}\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = 0 \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \quad (3.1.9)$$

求得度规应满足以下 4 个方程

$$\begin{cases} \frac{\partial g_{00}(2)}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{kk}(2)}{\partial x^0} - 2 \frac{\partial g_{0k}(3)}{\partial x^k} = 0 \\ \frac{\partial g_{00}(2)}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{kk}(2)}{\partial x^i} + 2 \frac{\partial g_{ik}(2)}{\partial x^k} = 0, \quad (i = 1, 2, 3) \end{cases} \quad (3.1.10)$$

2. Ricci 曲率

将式(3.1.6)代入 Ricci 曲率表达式(2.1.37),并利用上面的谐和坐标条件,得到

$$\begin{cases} R_{00}(2) = -\frac{1}{2}\nabla^2 g_{00}(2) \\ R_{ij}(2) = -\frac{1}{2}\nabla^2 g_{ij}(2) \\ R_{0j}(3) = \frac{1}{2}\nabla^2 g_{0j}(3) \\ R_{00}(4) = -\frac{1}{2}\left[\nabla^2\left(g_{00}(4) - \frac{1}{2}g_{00}^2(2)\right) - \frac{\partial^2 g_{00}(2)}{c^2 \partial t^2} \right. \\ \left. + g_{00}(2)\nabla^2 g_{00}(2) - g_{ij}(2)\frac{\partial^2 g_{00}(2)}{\partial x^i \partial x^j}\right] \end{cases} \quad (3.1.11)$$

第 4 式用到梯度运算公式

$$\nabla f \cdot \nabla f = \nabla^2(f^2/2) - f\nabla^2 f$$

3. 能动张量

考虑到场方程右边有因子 c^{-4} ,能动张量组合 $S_{\mu\nu}$ 的展开项应高出相应 $R_{\mu\nu}$ 展开项的 4 个级别,例如:

$$R_{00} = R_{00}(2) + R_{00}(4) \rightarrow S_{00} = S_{00}(+2) + S_{00}(0)$$

括号中的 $+n$ 是 c^n 的简写, 即 $S_{\mu\nu}(+n) \equiv S_{\mu\nu}(c^n)$ 。将能动张量的逆变和协变分量 (见式(2.2.5)、式(2.2.6)) 代入 $S_{\mu\nu}$ 表达式(3.1.8), 得到

$$\begin{cases} S_{00}(+2) = \frac{1}{2}\rho c^2 \\ S_{ij}(+2) = \frac{1}{2}\delta_{ij}\rho c^2 \\ S_{0j}(+1) = \sigma^i c \\ S_{00}(0) = -\frac{1}{2}(g_{00}(2)\rho c^2 - T^{ii}) \end{cases} \quad (3.1.12)$$

式中: $T^{ii} \equiv T^{11} + T^{22} + T^{33}$ 为应力张量的迹。

4. 后牛顿度规

将式(3.1.11)、式(3.1.12)代入场方程式(3.1.7), 对同量级的项作比较, 即 $R_{00}(2) = -\kappa S_{00}(+2), \dots$, 得到

$$\begin{cases} \nabla^2 g_{00}(2) = \kappa \rho c^2 \\ \nabla^2 g_{ij}(2) = \kappa \delta_{ij} \rho c^2 \\ \nabla^2 g_{0j}(3) = -2\kappa \sigma^i c \\ \nabla^2 \left(g_{00}(4) - \frac{1}{2}g_{00}^2(2) \right) = \frac{\partial^2 g_{00}(2)}{c^2 \partial t^2} + \frac{\kappa}{2} T^{ii} \end{cases} \quad (3.1.13)$$

第4式是根据 $R_{00}(4) = -\kappa S_{00}(0)$ 并利用第1和第2式得到的。不难看出, 式(2.1.13)的前3式具有相同的形式, 并且前2式具有相同的解, 因而可以将度规分别用标量函数 w, ψ 和矢量函数 $w(w^i)$ 表示为

$$\begin{cases} g_{00}(2) = -2w/c^2 \\ g_{ij}(2) = -2\delta_{ij}w/c^2 \\ g_{0i}(3) = 4w^i/c^3 \\ g_{00}(4) - \frac{1}{2}g_{00}^2(2) = 2\psi/c^4 \end{cases} \quad (3.1.14)$$

这表明后牛顿度规应该具有如下的形式:

$$\begin{cases} g_{00} = 1 - \frac{2w}{c^2} + \frac{2w^2 + \psi}{c^4} + O(6) \\ g_{ij} = -\delta_{ij} \left(1 + \frac{2w}{c^2} \right) + O(4) \\ g_{0i} = \frac{4w^i}{c^3} + O(5) \end{cases} \quad (3.1.15)$$

5. 后牛顿场方程

将式(3.1.14)代入式(3.1.13)得到

$$\begin{cases} \nabla^2 w = -4\pi G\rho \\ \nabla^2 w^i = -4\pi G\sigma^i \\ \nabla^2 \psi = 4\pi GT^{ii} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{cases} \quad (3.1.16)$$

再将式(3.1.14)代入谐和坐标条件式(3.1.10)的第1式,得到规范条件为

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{w} = 0 \quad (3.1.17)$$

式(3.1.16)和式(3.1.17)就是后牛顿场方程。

式(3.1.16)是爱因斯坦场方程在谐和坐标规范条件下的弱场近似,其中的第1,2式在形式上与牛顿引力场方程式(2.1.7)相同,均为泊松方程,故称作后牛顿近似。虽然这两式是线性的,但第3式并非线性方程,所以严格地说,后牛顿近似不是线性理论。但是如果令 $\psi = 0$,则第3式和第1式可以合并,于是成为

$$\begin{cases} \nabla^2 w - \frac{\partial^2 w}{c^2 \partial t^2} = -4\pi G(\rho + T^{ii}/c^2) \\ \nabla^2 w^i = -4\pi G\sigma^i \quad (\psi = 0) \end{cases} \quad (3.1.18)$$

这时的场方程变成线性的。下面将看到上式与DSX体系中场方程相同。

如果作进一步近似,设引力场是静态弱场,即引力标势与时间无关 $w = w(\mathbf{r})$,引力矢势 $w^i = 0$,且 $T^{ii} = 0$,则上式退化为牛顿引力场方程式(2.1.7)。这就是我们在2.2.1节指出的爱因斯坦场方程是牛顿引力场方程的推广。

3.1.3 DSX 体系的场方程和度规

引力场的线性化是很有实用价值的。例如,考虑物体在太阳系中运动,在高精度情况下必须考虑太阳、地球和太阳系其他行星等多个引力源产生的引力场,如果引力势可以线性叠加,只需要对各个引力源的引力场进行求和就得到总的场分布。

3.1.2节求得的PN场方程式(3.1.16)中的第3式是非线性的,为了解决这个问题,20世纪90年代建立了一种新的近似方法——DSX体系,它是由 Damour T、Soffel M 和 Xu C(须重明)共同完成的。限于篇幅,我们不打算对此进行详细讨论,仅给出基本结论。

DSX 体系的场方程为

$$\begin{cases} \nabla^2 w - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -4\pi G\sigma \\ \nabla^2 w^i = -4\pi G\sigma^i \end{cases} \quad (3.1.19)$$

式中

$$\sigma = \frac{1}{c^2}(T^{00} + T^{ii}), \quad \sigma^i = \frac{1}{c}T^{0i}$$

是体系的质量密度和动量密度, w 和 w^i 满足下面的坐标规范条件

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{w} = 0 \quad (3.1.20)$$

分别称作引力场的标量势和矢量势, 因为它们体现在度规中, 也称为度规势。由于场方程是线性化的, DSX 体系得到的近似度规可以进行线性叠加, 便于在不同的参考系中讨论问题——这也是 DSX 体系的最大优越性。

由此得到度规为

$$\begin{cases} g_{00} = 1 - \frac{2w}{c^2} + \frac{2w^2}{c^4} + O(6) \\ g_{ij} = -\delta_{ij}\left(1 + \frac{2w}{c^2}\right) + O(4) \\ g_{0i} = \frac{4w^i}{c^3} + O(5) \end{cases} \quad (3.1.21)$$

$$\begin{cases} g^{00} = 1 + \frac{2w}{c^2} - \frac{2w^2}{c^4} + O(6) \\ g^{ij} = -\delta^{ij}\left(1 - \frac{2w}{c^2}\right) + O(4) \\ g^{0i} = \frac{4w^i}{c^3} + O(5) \end{cases} \quad (3.1.22)$$

如果讨论光子的运动情况, 应在空间度规中再加上质量平方项:

$$\begin{cases} g_{00} = 1 - \frac{2w}{c^2} + \frac{2w^2}{c^4} + O(6) \\ g_{ij} = -\delta_{ij}\left(1 + \frac{2w}{c^2} + \frac{2w^2}{c^4}\right) + O(6) \\ g_{0i} = \frac{4w^i}{c^3} + O(5) \end{cases} \quad (3.1.23)$$

与 3.1.2 节进行比较, 如果令 $\psi = 0$, DSX 体系的式 (3.1.19)、式 (3.1.20)、

式(3.1.21)与PN近似的式(3.1.18)、式(3.1.17)、式(3.1.15)分别相同,这时的PN近似与DSX体系没有区别。因此,以后我们将上面两式称作2阶后牛顿(2PN)度规(严格地说是1.5PN,即时间度规是2阶、空间度规是1阶)。如果略去小于O(3)的高阶小量,则称作1PN度规(也有文献将上两式中不含矢量势的度规称作1PN)。

不难发现,后牛顿引力场与电磁场非常类似,见表3.1.1(参见表2.1.1)。对应于引力源(σ, σ)的是电荷密度和电流密度(ρ_e, J_e),与引力势(w, w)对应的是电磁势和矢势(Φ, A)。正因为如此,有文献根据磁场的定义 $B = \nabla \times A$ 引入一个“引力磁场”的概念 $b = k \nabla \times w$, 虽然这一观点并非广义相对论的正统观点,但对于形象地理解引力矢势是有帮助的,我们将在7.3.4节说明它的应用。

表 3.1.1 后牛顿引力场与电磁场的形式比较

	后牛顿引力场	电磁场
源	σ, σ	ρ_e, J_e
势	w, w	Φ, A
场方程	$\begin{cases} \nabla^2 w - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -4\pi G \sigma \\ \nabla^2 w = -4\pi G \sigma \end{cases}$	$\begin{cases} \nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho_e}{\epsilon_0} \\ \nabla^2 A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu_0 J_e \end{cases}$
规范条件	$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot w = 0$	$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot A = 0$

3.1.4 太阳系天体的标量势和矢量势

太阳系天体产生的引力场可以看成稳态引力场,即 $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(\mathbf{r})$, 故有

$$\frac{\partial w}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \tag{3.1.24}$$

于是式(3.1.19)化成泊松方程

$$\begin{cases} \nabla^2 w = -4\pi G \sigma \\ \nabla^2 w^i = -4\pi G \sigma^i \end{cases} \tag{3.1.25}$$

由于在无穷远处引力场消失, w 和 w 均应为0,故它们的解分别为

$$\begin{cases} w(\mathbf{r}) = G \int \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 x' \\ w^i(\mathbf{r}) = G \int \frac{\sigma^i(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 x' \end{cases} \tag{3.1.26}$$

式中: \mathbf{r} 和 \mathbf{r}' 分别为场点和引力源的矢径。考虑物质体系的质量分布相对静止的情况,这时上面的

$$\sigma(\mathbf{r}') = \rho(\mathbf{r}') , \quad \sigma(\mathbf{r}') = \rho(\mathbf{r}') v(\mathbf{r}')$$

为其质量密度和动量密度(参见式(1.3.30))。

1. 标量势

以天体的对称轴为 z 轴建立球坐标系 $\{r, \theta, \phi\}$, 则式(3.1.26)第1式的通解可表示为球谐函数(具体求解过程略)

$$w(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} A_n r^{-n} P_n(\cos\theta) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n B_{mn} r^{-n} P_{mn}(\cos\theta) \cos n(\phi - \phi_{mn}) \right] \quad (3.1.27)$$

式中: A_n 、 B_{mn} 为带谐和田谐系数; $P_n(\cos\theta)$ 和 $P_{nm}(\cos\theta)$ 为以 $\cos\theta$ 为变量的 n 阶 Legendre 函数和 n 阶 m 次缔合 Legendre 函数。

如果将天体看成对称旋转体, 则它的质量密度在 ϕ 方向上均匀, 标量势仅为 (r, θ) 的函数:

$$w(r, \theta) = \frac{\mu}{r} \left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{J_n R^n}{r^n} P_n(\cos\theta) \right] \quad (3.1.28)$$

式中: J_n 为 n 阶带谐系数或形状因子, 例如, J_2 反映天体剖面趋近于椭圆, J_3 反映天体趋近于梨形, 等等。

如果天体可以视为旋转椭球体, 在一般精度要求下只需在上式中取前两项, 即

$$\begin{cases} w(r, \theta) = \frac{\mu}{r} \left(1 - \frac{J_2 R^2 P_2(\cos\theta)}{r^2} \right) \\ P_2(\cos\theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1) \end{cases} \quad (3.1.29)$$

式中: $P_2(\cos\theta)$ 为 2 阶 Legendre 函数; R 为天体的半长轴, 形状因子也称作 4 极矩参数, 反映天体的扁率。设旋转椭球天体对 z 轴的转动惯量为 I_z , 对 x 或 y 轴的转动惯量为 $I_x = I_y$, 则 4 极矩参数

$$J_2 = \frac{I_z - I_x}{MR^2} \quad (3.1.30)$$

对地球而言, $J_{2E} = 1.083 \times 10^{-3}$ 。

式(3.1.29)也可写成

$$w(r, \theta) = w_0(r) + w_Q(r, \theta) \quad (3.1.31)$$

$$w_0 = \frac{\mu}{r}, \quad w_Q = -\frac{\mu J_2 R^2}{2r^3} (3\cos^2\theta - 1) \quad (3.1.32)$$

式中: w_0, w_Q 分别表示球对称天体和 4 极矩产生的引力势。以后主要应用上式进行讨论, 忽略更高阶多极矩的作用。

2. 矢量势

当天体外部的场点矢径大于引力源质量分布区域的矢径时, 可利用级数展开式

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} + \cdots \quad (r \gg r') \quad (3.1.33)$$

将上式代入式(3.1.26)的第 2 式, 得到引力场的矢量势

$$\begin{cases} w^i(\mathbf{r}) = \frac{Gp^i}{r} + \frac{Gx^j J^{ij}}{r^3} \\ p^i = \int \sigma^i(\mathbf{r}') d^3x' \\ J^{ij} = \int x'^j \sigma^i(\mathbf{r}') d^3x' \end{cases} \quad (3.1.34)$$

式中, p^i 和 J^{ij} 分别为天体的动量和角动量(见式(1.3.31)和式(1.3.43))。

如果质心静止且质量分布相对静止, 则质量分布与时间无关, 由能动张量守恒律可知(见式(1.3.35))

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0$$

因而在物质体系边界上 $\boldsymbol{\sigma}|_{\partial V} = 0$ (见式(1.3.36)), 采用分部积分的方法求得

$$\mathbf{p} = \frac{1}{3} \int \nabla \cdot \mathbf{r} \boldsymbol{\sigma} d^3x = \frac{1}{3} (\mathbf{r} \boldsymbol{\sigma}|_{\partial V} - \int \mathbf{r} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} d^3x) = 0 \quad (3.1.35)$$

其中, $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$ 。这个结论可以这样理解: 对一个很小的体元 d^3x , $\boldsymbol{\sigma} d^3x$ 是该体元的动量, 如果物质体系的质心静止且质量分布相对静止, 则总动量必然为 0。但是如果质心具有速度 \mathbf{v} , 则总动量是质量为 M 的质点动量

$$\mathbf{p} = \int \rho(\mathbf{r}') \mathbf{v}(\mathbf{r}') d^3x = M \mathbf{v} \quad (3.1.36)$$

利用式(1.3.44), 得到引力场的矢量势

$$\begin{cases} w^i(\mathbf{r}) = \frac{\mu v^i}{r} + \frac{G \varepsilon_{ijk} x^j J^k}{2r^3} \\ J^k = \int \varepsilon_{ijk} x'^i \sigma^j(\mathbf{r}') d^3x' \end{cases} \quad (3.1.37)$$

其矢量形式

$$\begin{cases} \mathbf{w}(\mathbf{r}) = \frac{\mu \mathbf{v}}{r} + \frac{G \mathbf{J} \times \mathbf{r}}{2r^3} \\ \mathbf{J} = \int \mathbf{r}' \times \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}') d^3x' \end{cases} \quad (3.1.38)$$

对于太阳或地球等太阳系天体,一般具有确定的自转轴和角速度 Ω ,动量密度为

$$\sigma(\mathbf{r}') = \rho(\mathbf{r}') \mathbf{v}(\mathbf{r}') = \rho(\mathbf{r}') \Omega \times \mathbf{r}'$$

由式(3.1.38)可知角动量是

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \int \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' \times (\Omega \times \mathbf{r}') d^3x' \\ &= \left[\int \rho(\mathbf{r}') r'^2 d^3x' \right] \Omega = I \Omega \end{aligned} \quad (3.1.39)$$

式中: I 为天体的转动惯量。

3.1.5 质点和光子的后牛顿运动方程

在2.5节曾经讨论了史瓦西场中的质点和光子的运动方程,但它们只是对单个非旋转的球对称引力源才成立。本节求解DSX体系度规下的运动方程,其优点是引力势可以是多个引力源(如太阳、地球和月球等)的引力势的叠加,引力源可以是转动的、非球对称的,这与实际情况更为接近,因而本节的结论可以直接应用于太阳系引力场中的质点和光子的运动。

1. 质点后牛顿运动方程

将2PN度规式(3.1.21)代入式(3.1.6),求得联络系数

$$\left\{ \begin{aligned} \Gamma_{00}^k &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(w - \frac{2w^2}{c^2} \right) \\ \Gamma_{00}^0 &= 0 \\ \Gamma_{0j}^k &= \frac{2}{c^3} \left(\frac{\partial w^k}{\partial x^j} - \frac{\partial w^j}{\partial x^k} \right) \\ \Gamma_{0j}^0 &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial w}{\partial x^j} \\ \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{c^2} \left(\delta_{ik} \frac{\partial w}{\partial x^j} + \delta_{jk} \frac{\partial w}{\partial x^i} - \delta_{ij} \frac{\partial w}{\partial x^k} \right) \\ \Gamma_{ij}^0 &= 0 \end{aligned} \right. \quad (3.1.40)$$

代入测地线方程式(3.1.4),就得到质点的3维加速度

$$\begin{aligned} \frac{dv^k}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial x^k} + \frac{1}{c^2} \left[(v^2 - 4w) \frac{\partial w}{\partial x^k} \right. \\ &\quad \left. - 4v^k \left(v^j \frac{\partial w}{\partial x^j} \right) + 4v^j \left(\frac{\partial w^j}{\partial x^k} - \frac{\partial w^k}{\partial x^j} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.1.41)$$

表示成矢量形式

$$\mathbf{a}_{2\text{PN}} = \nabla w + \frac{1}{c^2} [(v^2 - 4w) \nabla w - 4\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \nabla w) - 4\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{w}] \quad (3.1.42)$$

这就是质点的 2PN 运动方程。对于 1PN 度规,也就是不考虑天体标量势的平方 w^2 和矢量势 \mathbf{w} ,则上式退化为

$$\mathbf{a}_{1\text{PN}} = \nabla w + \frac{1}{c^2} [v^2 \nabla w - 4\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \nabla w)] \quad (3.1.43)$$

如果进一步忽略小于 c^{-2} 的高阶小量,则上式退化为我们熟知的牛顿运动方程

$$\mathbf{a}_\text{N} = \nabla w \quad (3.1.44)$$

可见,质点在引力场中的后牛顿加速度可以看成牛顿加速度加上一个为牛顿修正项

$$\mathbf{a}_{2\text{PN}} = \mathbf{a}_\text{N} + \delta\mathbf{a}_{2\text{PN}}, \quad \mathbf{a}_{1\text{PN}} = \mathbf{a}_\text{N} + \delta\mathbf{a}_{1\text{PN}} \quad (3.1.45)$$

式中, $\delta\mathbf{a}_{2\text{PN}}$ 和 $\delta\mathbf{a}_{1\text{PN}}$ 可分别由式(3.1.42)和式(3.1.43)得出。这也再次表明后牛顿理论比牛顿引力定律更为精确。

2. 光子后牛顿运动方程

再来看引力场中光子的运动速度和加速度。光子的 2PN 线元为

$$\begin{aligned} 0 &= c^2 g_{00} + 2c g_{0i} v^i + g_{ij} v^i v^j \\ &= c^2 \left(1 - \frac{2w}{c^2} + \frac{2w^2}{c^4} \right) - \frac{8}{c^3} w^i n_i v - \left(1 + \frac{2w}{c^2} + \frac{2w^2}{c^4} \right) v^2 \end{aligned} \quad (3.1.46)$$

式中: $\mathbf{n} = \mathbf{v}/v = (n_i)$ 为光子运动方向的单位矢; n_i 为单位矢量的第 i 分量。式(3.1.46)是关于 v 的二次方程,其解为

$$v = c \left(1 + \frac{2w}{c^2} + \frac{2w^2}{c^4} \right)^{-1} \left(\sqrt{1 + \frac{(4w^i n_i)^2}{c^6}} - \frac{4w^i n_i}{c^3} \right) \quad (3.1.47)$$

根号前取正号是要保证 $v > 0$ 。利用级数展开式即可得到光子的 2PN 坐标速度的矢量形式(精确到 c^{-5})

$$\mathbf{v} = \mathbf{n} \left(c - \frac{2w}{c} + \frac{2w^2}{c^3} - \frac{4\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}}{c^2} + \frac{8(\mathbf{n} \cdot \mathbf{w})^2}{c^5} \right) \quad (3.1.48)$$

将式(3.1.48)代入式(3.1.42),即可得到光子的 2PN 加速度(精确到 c^{-4}):

$$a_{2PN} = 2 \nabla w - 4n(n \cdot \nabla w) - \frac{4}{c} \left(1 - \frac{2w}{c^2} \right) n \times \nabla \times w - \frac{8w}{c^2} [\nabla w - 2n(n \cdot \nabla w)] + \frac{8w^2}{c^4} [\nabla w - 4n(n \cdot \nabla w)] \quad (3.1.49)$$

忽略标量势的平方项和矢量势,得到光子的 1PN 加速度

$$a_{1PN} = 2 \nabla w - 4n(n \cdot \nabla w) \quad (3.1.50)$$

式(3.1.50)相当于在质点的 1PN 加速度中取光子速度 $v = cn$ 的结果。

说明: 由于我们讨论的是稳态时空,没有考虑引力势的时间导数项。如果引力场分布与时间有关,则式(3.1.42)右边还应包含 $(4\partial_t w - 3v\partial_t w)/c^2$,相应地,式(3.1.49)也应加入相关项,具体结论可参考有关文献。

结束本节之前,我们来比较后牛顿引力理论与广义相对论和牛顿引力理论,将它们的异同归纳为表 3.1.2。可以看出,后牛顿理论虽然是广义相对论的近似理论,但在形式上与牛顿引力理论非常相似。引力场由引力矢势和标势(w , \mathbf{w})描述,引力势与引力源的关系由泊松方程来确定,这就决定了后牛顿理论也满足线性叠加原理。另外,引力场中物体的运动方程在形式上也与牛顿理论相似但精度更高。

表 3.1.2 三种引力理论的比较

	广义相对论	后牛顿引力理论	牛顿引力理论
引力源	$T_{\mu\nu}(\rho, \sigma, T)$	σ, σ	ρ
引力势 (度规)	$g_{\mu\nu}(w, \mathbf{w})$	w, \mathbf{w}	w
场方程	$\begin{cases} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\kappa T_{\mu\nu} \\ g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \nabla^2 w - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -4\pi G\sigma \\ \nabla^2 \mathbf{w} = -4\pi G\sigma \\ \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{w} = 0 \end{cases}$	$\nabla^2 w = -4\pi G\rho$
运动方程	$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}$	$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \nabla w + \frac{1}{c^2}(\dots)$	$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \nabla w$

3.2 后牛顿理论的时间和空间

在 DSX 体系中,背景时空是狭义相对论的 4 维闵氏时空,物质或引力并不

改变时间和空间的本质,而是作为动力学效应体现的一种度规场,类似于电磁场。因此本节讨论的时空观仍然是基于 4 维闵氏时空,如果参考系是静止的就是惯性系,如太阳系质心参考系,相对于它作加速运动的参考系就是非惯性系,如地心参考系。这也是国际天文学会(IAU)认可的处理方式,从应用的角度,DSX 体系确实要比正统的广义相对论更加方便简单,在讨论太阳系范围内物体运动规律的情况下不会降低测量精度。

3.2.1 太阳系质心和地心天球参考系

天球是以太阳系质心(或地心)为中心,以无穷远为半径的一个假想的球,所有的天体都可以从中心投影到这个球面上,以天球为基础建立的参考系称作天球参考系,主要有太阳系质心天球参考系(Barycentric Celestial Reference System, BCRS)和地心天球参考系(Geocentric Celestial Reference System, GCRS),简称质心系和地心系。

太阳系的主要角色是太阳,还包括水星、金星、地球、火星、土星、木星、天王星、海王星等八大行星,以及众多的卫星、小行星、彗星、流星和星际物质。八大行星所在空间范围约为 60AU (AU 为天文单位,等于日地平均距离),目前人类空间活动涉及的区域大约 1.5AU (太阳到火星的距离)。太阳质量占太阳系天体总质量的 99.86%,其他天体中质量最大是木星,约为其他行星质量总和的 2 倍,因此太阳系质心(Solar System Barycenter, SSB, 记作 B)主要取决于太阳和木星,大约位于太阳与木星连线上靠近太阳表面处,太阳绕 SSB 的转动周期约为 12yr (见“天文常数表”)。在以下的讨论中常常忽略太阳相对于 SSB 的速度和加速度。

地球绕太阳公转的轨道平面称之为黄道面,它是一个固定平面。以黄道面为 $x^1 - x^2$ 平面建立的坐标系 $\{x^1, x^2, x^3\} = \{x, y, z\}$ 称作黄道坐标系。

由于受到外力矩的作用,地球的自转轴会产生微小的进动和章动,现在一般规定天球中间轴(Celestial Intermediate Pole, CIP)作为极轴,实质上是地幔的平均形状轴,其延长线也称天轴。垂直于极轴的赤道平面是一个固定平面,它与黄道面的交角称作黄赤交角:

$$\varepsilon = 23^\circ 26' 21'' (\text{J2000.0})$$

赤道面和黄道面在天球上的交点称作春分点 Γ 和秋分点 Γ' ,两点的连线当然也是固定不变的。通常以地心为坐标原点 O 、地心到春分点的连线为 X^1 轴,赤道面为 $X^1 - X^2$ 平面、地球极轴为 X^3 轴建立的坐标系 $\{X^1, X^2, X^3\} = \{X, Y, Z\}$ 称作赤道坐标系。

我们知道,以坐标轴 X, Y, Z 为转轴逆时针转动 α 角的转动矩阵分别为

$$\begin{cases} \mathbf{R}_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \\ \mathbf{R}_y(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \\ \mathbf{R}_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3.2.1)$$

上述单参量变换矩阵的逆矩阵均满足

$$\mathbf{R}^{-1}(\alpha) = \mathbf{R}^T(\alpha) = \mathbf{R}(-\alpha)$$

如图 3.2.1 所示,设黄道坐标系的 x^1 轴也指向春分点,与赤道坐标系的 X^1 轴平行。以 X^1 轴为转轴将赤道坐标系逆时针(逆着 X^1 轴看)转动 ε 角,则坐标系基矢量对应平行。根据式(3.2.1),赤道与黄道坐标基矢的变换关系为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix} = \mathbf{R}_x(\varepsilon) \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix} \quad (3.2.2)$$

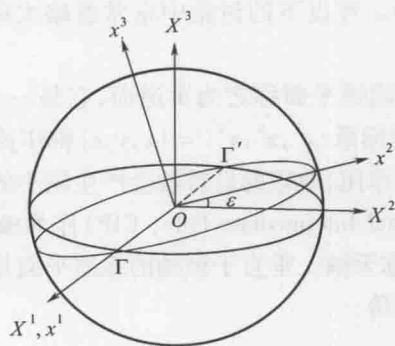


图 3.2.1 黄道坐标系 $\{x^1, x^2, x^3\}$ 与赤道坐标系 $\{X^1, X^2, X^3\}$

太阳系作为宇宙空间的一个星系并不是绝对静止的。但是如果我们忽略其他星系的作用,在足够的精度内可以将太阳系看成静止的,正如我们考虑地面及其地球附近空间的物体运动时将地球看成静止的一样。因此,在 DSX 体系中 BCRS 是整体惯性系。虽然 GCRS 的坐标轴相对于 BCRS 保持不变,但其原点在 BCRS 中作加速运动,故 GCRS 是非惯性系。不过在下面将看到,GCRS 的加速

运动是由于除地球外其他引力源的作用产生的,如果将这些引力的作用用地球的惯性离心力和潮汐力表示(见 3.2.3 节),则 GCRS 也可看成惯性系,因此人们也将 GCRS 称作伪惯性系。

在本节中将 BCRS 和 GCRS 的时空坐标分别记作

$$\begin{aligned}(x^\mu | \mu = 0, 1, 2, 3) &= (ct, x^i | i = 1, 2, 3), \quad t = \text{TCB} \\(X^\alpha | \alpha = 0, 1, 2, 3) &= (cT, X^a | a = 1, 2, 3), \quad T = \text{TCG}\end{aligned}$$

其中, t 为质心坐标时(Barycentric Coordinate Time, TCB), T 为地心坐标时(Geocentric Coordinate Time, TCG), 坐标时是假设引力场完全消失的情况下, 在坐标系中不同地点放置许多时钟, 并保持严格同步和相同的示数, 这些钟记录的当地时间就是坐标时, 与引力场无关但与参考系有关。

除了以上介绍的 BCRS 和 GCRS 外, 在空间技术应用中常常根据实际情况设置其他参考系。例如, 以日—地质心为参考点、随地球公转的日地质心参考系, 以地—月质心为参考点、随月球绕地球转动的地月质心参考系, 以地心为参考点、随地球自转的地球参考系, 以及以观测站为参考点、固定于地球的站心参考系, 等等。这些参考系可通过空间坐标变换与 BCRS 或 GCRS 建立联系。因此我们主要讨论 BCRS 与 GCRS 的时空变换, 两个参考系的空间坐标系分别取黄道和赤道坐标系。

3.2.2 太阳系质心系与地心系的时空变换

在 DSX 体系中, BCRS 和 GCRS 是作为整体惯性系和局域参考系, (x^μ) 和 (X^α) 虽然都是 4 维闵氏(平直)空间的时空坐标, 但前者是惯性系而后者是加速系, 因而不能直接应用洛伦兹变换。回顾 1.1.2 节介绍的固有洛伦兹变换, 它对瞬时惯性系也成立。因此我们首先建立一个中间惯性系 $\{\eta, \xi\}$, η 和 ξ 分别是该参考系的时间和空间坐标, 相对于 GCRS 瞬时静止。于是可在惯性系 $\{t, r\}$ 与瞬时惯性系 $\{\eta, \xi\}$ 之间应用洛伦兹变换。

设瞬时惯性系 $\{\eta, \xi\}$ 在惯性系 BCRS 中的瞬时速度为 $v_E(t)$, 根据固有洛伦兹变换式(1.1.5)

$$\begin{cases} dt = \gamma \left(d\eta + \frac{v_E \cdot d\xi}{c^2} \right) \\ dr = d\xi + \gamma v_E d\eta + \frac{(\gamma - 1)}{v_E^2} v_E (v_E \cdot d\xi) \end{cases} \quad (3.2.3)$$

其中, 收缩因子可作级数展开

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v_E^2/c^2}} = 1 + \frac{v_E^2}{2c^2} + O(c^{-4})$$

\mathbf{r} 为航天器相对于 BCRS 原点 (SSB) 的位移, 设相对于 GCRS 原点 (地心) 的位移是 \mathbf{x} , 则二者的关系为 (见图 3.2.2)

$$\mathbf{x} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_E(t), \quad d\mathbf{x} = d\mathbf{r} - \mathbf{v}_E dt \quad (3.2.4)$$

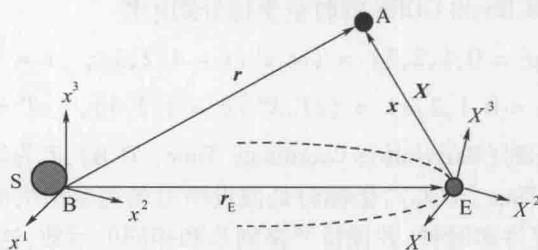


图 3.2.2 BCRS 与 GCRS 的坐标变换

注意到 $dt = dt(\eta, \xi)$, 由上面 3 式得到洛伦兹变换为

$$\begin{cases} dt = d\eta + \frac{1}{2c^2}(v_E^2 d\eta + 2\mathbf{v}_E \cdot d\xi) \\ d\mathbf{x} = d\xi - \frac{1}{2c^2}\mathbf{v}_E(\mathbf{v}_E \cdot d\xi) \end{cases} \quad (3.2.5)$$

现在, 我们再将 $\{\eta, \xi\}$ 变换到 $\{T, X\}$ 。由于 GCRS 是加速系, 其原点的加速度 $\mathbf{a}_E = \nabla w_E(0)$, $w_E(0)$ 是除地球外的其他天体 (记作 \bar{E}) 在地心处 ($X=0$) 产生的引力势。在时空点 (T, X) 的加速度则应是 $\mathbf{a} = \nabla w_E(X)$, 等效于处在引力势为 w_E 的引力场中。根据 2.4.3 节的结论, $(d\eta, d\xi)$ 和 (dT, dX) 分别是局域静止惯性系和处在引力场 (w_E) 中的时空坐标间隔, 二者满足关系式 (2.4.22)

$$\begin{cases} d\eta = dT \left(1 - \frac{2w_E}{c^2}\right)^{-1/2} \approx dT \left(1 + \frac{w_E}{c^2}\right) \\ d\xi = dX \left(1 + \frac{2w_E}{c^2}\right)^{-1/2} \approx dX \left(1 - \frac{w_E}{c^2}\right) \end{cases} \quad (3.2.6)$$

将上式代入式 (3.2.5) 并略去高阶小量 $O(c^{-4})$, 得到 BCRS 与 GCRS 的坐标变换式

$$\begin{cases} dt = dT + \frac{1}{2c^2}[(v_E^2 + 2w_E)dT + 2\mathbf{v}_E \cdot dX] \\ d\mathbf{x} = dX - \frac{1}{2c^2}[2w_E dX + \mathbf{v}_E(\mathbf{v}_E \cdot dX)] \end{cases} \quad (3.2.7)$$

逆变换是

$$\begin{cases} dT = dt - \frac{1}{2c^2}[(v_E^2 + 2w_E)dt + 2\mathbf{v}_E \cdot d\mathbf{x}] \\ dX = d\mathbf{x} + \frac{1}{2c^2}[2w_E d\mathbf{x} + \mathbf{v}_E(\mathbf{v}_E \cdot d\mathbf{x})] \end{cases} \quad (3.2.8)$$

将式(3.2.7)和式(3.2.8)两边分别相除,可得到速度变换及逆变换关系为

$$\begin{cases} \mathbf{v} = \mathbf{V} - \frac{1}{2c^2}[2w_{\bar{\mathbf{E}}}\mathbf{V} + \mathbf{v}_{\mathbf{E}}(\mathbf{v}_{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{V})] \\ \mathbf{V} = \mathbf{v} + \frac{1}{2c^2}[2w_{\bar{\mathbf{E}}}\mathbf{v} + \mathbf{v}_{\mathbf{E}}(\mathbf{v}_{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{v})] \end{cases} \quad (3.2.9)$$

式中: $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$, $\mathbf{V} = d\mathbf{X}/dT$ 分别为 BCRS 和 GCRS 中物体相对于地心的速度。

说明: 由于式(3.2.6)是 1PN 度规下的结果,上面 3 式精确到 c^{-2} 量级是严格的,对于更高精度的变换式(主要指时间变换式)可参考有关文献。

如果 BCRS 和 GCRS 的空间坐标系分别设置为黄道和赤道坐标系(见图 3.2.1),利用变换式(3.2.1)对空间矢量作转换:

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i = x^i R_i^a \mathbf{e}_a$$

$\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_a (i, a = 1, 2, 3)$ 分别黄道和赤道坐标系的基矢, R_i^a 是 $\mathbf{R} = \mathbf{R}_x(-\varepsilon)$ 的矩阵元。则式(3.2.8)的分量形式为

$$\begin{cases} dX^0 = \left(1 - \frac{v_{\mathbf{E}}^2 + 2w_{\bar{\mathbf{E}}}}{2c^2}\right) dx^0 - \frac{1}{c} \delta_{ij} v_{\mathbf{E}}^i dx^j \\ dX^a = \left(1 + \frac{w_{\bar{\mathbf{E}}}}{c^2}\right) R_j^a dx^j + \frac{R_k^a v_{\mathbf{E}}^k}{2c^2} \delta_{ij} v_{\mathbf{E}}^i dx^j \end{cases} \quad (3.2.10)$$

于是得到变换系数矩阵为

$$\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{v_{\mathbf{E}}^2 + 2w_{\bar{\mathbf{E}}}}{2c^2} & -\frac{v_{\mathbf{E}}^i}{c} \\ 0 & \left(1 + \frac{w_{\bar{\mathbf{E}}}}{c^2}\right) R_i^a + \frac{R_k^a v_{\mathbf{E}}^k}{2c^2} v_{\mathbf{E}}^i \end{bmatrix} \quad (3.2.11)$$

这是一个 4×4 矩阵,式中的 $\alpha, \mu = 0, 1, 2, 3$ ($a, i = 1, 2, 3$) 分别为矩阵的行列号。

根据坐标变换,得到 BCRS 与 GCRS 的几个重要关系:

1. 质心坐标时(TCB)与地心坐标时(TCG)的关系

由于观测者在 BCRS 中的矢径远大于 GCRS 中的矢径, $|\mathbf{r}| = |\mathbf{r}_{\mathbf{E}} + \mathbf{x}| \gg |\mathbf{x}|$, 可将观测者所在处的外部引力势在地心处($\mathbf{x} = 0$)展开成

$$w_{\bar{\mathbf{E}}}(\mathbf{x}) = w_{\bar{\mathbf{E}}}(0) + \mathbf{a}_{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{x} \quad (3.2.12)$$

代入式(3.2.8)的第 1 式后积分,因

$$w_{\bar{\mathbf{E}}}(\mathbf{x}) dt + \mathbf{v}_{\mathbf{E}} \cdot d\mathbf{x} = w_{\bar{\mathbf{E}}}(0) dt + d(\mathbf{v}_{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{x})$$

得到坐标时 $t = \text{TCB}$ 与 $T = \text{TCG}$ 的关系

$$\text{TCB} - \text{TCG} = \frac{1}{2c^2} \left[\int_0^t (v_{\mathbf{E}}^2 + 2w_{\bar{\mathbf{E}}}(0)) dt + 2\mathbf{v}_{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{x} \right] \quad (3.2.13)$$

如果将地球公转处理成匀速圆周运动,近似有 $w_{\bar{E}}(0) \approx v_E^2 = \text{常数}$,上式化成

$$\left(1 - \frac{3v_E^2}{2c^2}\right) \text{TCB} - \text{TCG} \approx \frac{\mathbf{v}_E \cdot \mathbf{x}}{c^2}$$

对长时间求平均,右边平均效果为 0,取地球平均速度 $v_E = 29765 \text{ m/s}$,计算出

$$\left\langle \frac{\text{TCG}}{\text{TCB}} \right\rangle \approx 1 - \frac{3v_E^2}{2c^2} \approx 1 - 1.48 \times 10^{-8}$$

它反映了两个坐标时的平均偏差。

如果要求精确到 c^{-4} 量级,可以证明

$$\begin{aligned} \text{TCB} - \text{TCG} = & \frac{1}{2c^2} \left[\int_0^t (v_E^2 + 2w_{\bar{E}}(0)) dt + 2\mathbf{v}_E \cdot \mathbf{x} \right] \\ & + \frac{1}{2c^4} \left[\int_0^t (V_E^4/4 + 3v_E^2 w_{\bar{E}}(0) - w_{\bar{E}}^2(0) - 8\mathbf{v}_E \cdot \mathbf{w}_{\bar{E}}) dt \right. \\ & \left. + (6w_{\bar{E}}(0) + v_E^2) \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{x} \right] \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

根据此式求得平均值为

$$\begin{cases} \langle \text{TCG}/\text{TCB} \rangle = 1 - L_C \\ L_C = 1.48082686471 \times 10^{-8} \end{cases} \quad (3.2.15)$$

这比上面求得结果更为精确,它也是 IAU 认定的参数。

2. 质心坐标长度与地心坐标长度的关系

将式(3.2.12)代入式(3.2.8)的第2式,注意到 $dw_{\bar{E}}(0) = \mathbf{a}_E \cdot d\mathbf{x}$,积分得

$$\mathbf{X} = \mathbf{x} + \frac{1}{2c^2} [2w_{\bar{E}}(0)\mathbf{x} + (\mathbf{v}_E \cdot \mathbf{x})\mathbf{v}_E + 2(\mathbf{a}_E \cdot \mathbf{x})\mathbf{x} - \mathbf{a}_E x^2] \quad (3.2.16)$$

因为上式两边均为空间矢量,分别点积后开方,得到 BCRS 与 GCRS 的坐标长度关系为

$$X = x \left\{ 1 + \frac{1}{2c^2} [2w_{\bar{E}}(0) + (\mathbf{v}_E \cdot \hat{\mathbf{x}})^2 + \mathbf{a}_E \cdot \mathbf{x}] \right\} \quad (3.2.17)$$

式中: $X = \sqrt{\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}}$; $x = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/x$ 为 \mathbf{x} 的单位矢。

对地球周围的航天器,上式给出的两个坐标长度相对偏差 $|X - x|/x$ 的量级约为 10^{-8} ,在一般条件下可以满足测量精度要求。关于空间坐标变换的高精度表达式可参见有关文献。

3. BCRS 与 GCRS 的引力势变换关系

设 BCRS 和 GCRS 中的引力场度规 $g_{\mu\nu}$ 和 $G_{\alpha\beta}$ 都具有式(3.1.21)的形式,满

足张量的变换关系

$$G^{\alpha\beta}(W, W) = \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu}(w, w) \quad (3.2.18)$$

式中: (w, w) 和 (W, W) 分别为 BCRS 和 GCRS 的引力势。

将坐标变换式(3.2.11)代入上式,可求出引力势的变换关系是

$$\begin{cases} w = W \left(1 + \frac{2v_E^2}{c^2} \right) + \frac{4}{c^2} \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{W} + O(c^{-4}) \\ \mathbf{w} = \mathbf{W} + \mathbf{v}_E W + O(c^{-2}) \end{cases} \quad (3.2.19)$$

逆变换是

$$\begin{cases} W = w \left(1 + \frac{2v_E^2}{c^2} \right) - \frac{4}{c^2} \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{w} + O(c^{-4}) \\ \mathbf{W} = \mathbf{w} - \mathbf{v}_E w + O(c^{-2}) \end{cases} \quad (3.2.20)$$

上面的变换反映了参考系的相互运动效应,显然,当 $\mathbf{v}_E = 0$ 时, $w = W, \mathbf{w} = \mathbf{W}$ 。

将本小节的结论归纳为图 3.2.3,从中可以看出 BCRS 与 GCRS 的相互关系。

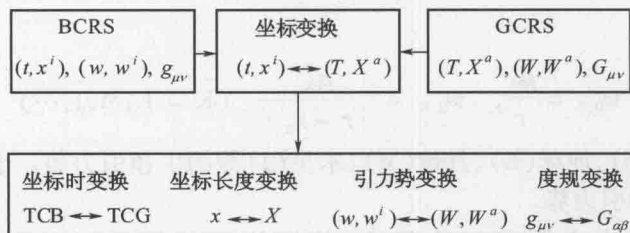


图 3.2.3 BCRS 与 GCRS 的相互关系

3.2.3 太阳系质心系的度规和质心坐标时

首先说明,引力场的线元或固有时 $ds = cd\tau$ 与坐标系无关,但是当考虑问题所涉及的区域不同的情况下,可以取不同的度规来近似求解。如果考虑太阳引力为主要引力源的运动,采用 BCRS 较为方便,这时可以忽略离太阳较远的引力源的作用,而在 GCRS 中则主要考虑地球引力场。

设太阳系引力场的线元为

$$ds^2 = g_{00}c^2 dt^2 + 2g_{0i}cdtdx^i + g_{ij}dx^i dx^j \quad (3.2.21)$$

其中度规与引力势的函数关系 $g_{\mu\nu}(w, w)$ 由式(3.1.21)决定。引力场的标势和矢势包括太阳、地球和太阳系其他天体的作用,即

$$\begin{cases} w = w_S + w_E + \sum_{K \neq S, E} w_K \\ \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_S + \boldsymbol{w}_E + \sum_{K \neq S, E} \boldsymbol{w}_K \end{cases} \quad (3.2.22)$$

由于我们主要讨论区域在太阳与地球之间,引力场主要来自于太阳和地球的贡献,故可作以下几点近似:

(1) 将太阳和地球以外的其他天体(例如月球和木星等)处理为点源,即忽略它们的形状和自转的影响,仅取牛顿引力势;

(2) 在标量势平方项中仅考虑太阳和地球的牛顿引力势,忽略4极矩修正项;

(3) 矢量势仅考虑太阳和地球的作用,并将它们的角动量方向取为自转轴。在上述近似下的度规成为

$$\begin{cases} g_{00} = 1 - \frac{2}{c^2} \left(w_S + w_E + \sum_{K \neq S, E} w_{0,K} \right) + \frac{2}{c^4} (w_{0,S} + w_{0,E})^2 \\ g_{ij} = -\delta_{ij} \left[1 + \frac{2}{c^2} \left(w_S + w_E + \sum_{K \neq S, E} w_{0,K} \right) \right] \\ g_{0i} = -\frac{4}{c^3} (w_S^i + w_E^i) \end{cases} \quad (3.2.23)$$

其中

$$w_{0,S} = \frac{\mu_S}{r}, \quad w_{0,K} = \frac{\mu_K}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_K|} \quad (K = E, M, J, \dots)$$

分别是太阳(S)、地球(E)、月球(M)、木星(J)等的牛顿引力势。下面分别说明太阳和地球的引力势。

在BCRS中太阳可视为静止,其标势和矢势分别由式(3.1.29)和式(3.1.38)确定

$$\begin{cases} w_S(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_S}{r} \left(1 - \frac{J_{2S} R_S^2 P_2(\theta)}{r^2} \right) \\ \boldsymbol{w}_S(\boldsymbol{r}) = \frac{G \boldsymbol{J}_S \times \boldsymbol{r}}{2r^3} \end{cases} \quad (3.2.24)$$

式中: $R_S, J_{2S}, \boldsymbol{J}_S$ 分别为太阳的平均半径、4极矩参数和相对自转轴的角动量; θ 为 \boldsymbol{r} 与太阳自转轴的夹角。根据式(3.2.19),在BCRS中地球的引力势应为

$$\begin{cases} w_E(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_E}{x} \left(1 - \frac{J_{2E} R_E^2 P_2(\vartheta)}{x^2} + \frac{2v_E^2}{c^2} \right) \\ \boldsymbol{w}_E(\boldsymbol{x}) = \frac{G \boldsymbol{J}_E \times \boldsymbol{x}}{2x^3} + \frac{\mu_E \boldsymbol{v}_E}{x} \end{cases} \quad (3.2.25)$$

式中: R_E, J_{2E}, J_E 分别为地球的长半径、4 极矩参数和相对自转轴的角动量; ϑ 是 \mathbf{x} 与地球自转轴的夹角。式中与 \mathbf{v}_E 有关的项是地心在 BCRS 中的运动产生的标势和矢势。由于 $J_E \sim 10^{33} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ 较小, 第 1 式右边与 J_E 有关的部分已经忽略。

下面讨论地球周围观测者的固有时与质心坐标时的关系。

将式(3.1.21)代入线元表达式(3.2.21), 并利用级数展开式求得固有时与坐标时的关系

$$\begin{aligned} d\tau &= dt \left[1 - \frac{2w}{c^2} + \frac{2w^2}{c^4} - \left(1 + \frac{2w}{c^2} \right) \frac{v^2}{c^2} + \frac{8\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}}{c^4} \right]^{1/2} \\ &= \left(1 - \frac{w}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2} \right) dt - \frac{1}{2c^4} (v^2/4 + 3w_0 v^2 - w_0^2 - 8\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}) dt \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

上式右边分为两部分: 分别是 1PN 度规以及在 c^{-4} 量级的 2PN 度规修正项。

1PN 度规是主要部分, 其中的观测者速度可分解成

$$v^2 = (\dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{r}}_E)^2 = v_0^2 + v_E^2 + 2\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_E$$

$\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{v}_E = \dot{\mathbf{r}}_E$ 分别是观测者相对于地心和地心在 BCRS 中的速度。地球周围的引力势 $w(\mathbf{r})$ 可以分成地球产生的(w_E)和不含地球的其他天体产生的($w_{\bar{E}}$)两部分, 而 $w_{\bar{E}}$ 又可利用式(3.2.11)在地心处作级数展开, 因而

$$w(\mathbf{r}) = w(\mathbf{x} + \mathbf{r}_E) \approx w_E(\mathbf{x}) + w_{\bar{E}}(0) + \mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_E$$

将上面两式代入式(3.2.26)的第 1 部分, 在 2PN 度规修正项中取 $\mathbf{r} \approx \mathbf{r}_E, \mathbf{v} \approx \mathbf{v}_E$, 然后积分得到

$$\begin{aligned} \tau &= t - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_E}{c^2} - \frac{1}{2c^2} \int_0^t [2w_E(\mathbf{x}) + 2w_{\bar{E}}(0) + (v_0^2 + v_E^2)] dt \\ &\quad - \frac{1}{2c^4} \int_0^t (v_E^2/4 + 3w_0 v_E^2 - w_0^2 - 8\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_E) dt \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

这就是地球周围观测者($x \ll r_E$)的固有时 τ 与质心坐标时 $t = \text{TCB}$ 的关系。上式右边后两项为高阶小量 $O(c^{-4})$, 对于高精度的测量应该考虑这一部分的修正, 在一般情况下只需考虑 1PN 度规的作用。

假设时钟静止于地球质心, 满足条件 $\mathbf{x} = 0, \mathbf{v}_0 = 0, w_E(0) = 0, w_{\bar{E}}(0) = 0$, 由上式可知地心处时钟的固有时为

$$\begin{aligned} \tau|_{\mathbf{x}=0} &= t - \frac{1}{2c^2} \int_0^t [2w_{\bar{E}}(0) + v_E^2] dt \\ &\quad - \frac{1}{2c^4} \int_0^t (v_E^2/4 + 3w_{\bar{E}}(0)v_E^2 - w_{\bar{E}}^2(0) - 8\mathbf{w}_{\bar{E}} \cdot \mathbf{v}_E) dt \end{aligned}$$

将上式与式(3.2.14)比较,在 $x=0$ 时二者相同。故有

$$\tau|_{x=0} = (1 - L_C)t \quad (3.2.28)$$

如果仅考虑 1PN 度规,并将地球公转看成匀速圆周运动, $w_E(0) \approx v_E^2$, 则近似有

$$\tau|_{x=0} \approx \left(1 - \frac{3v_E^2}{2c^2}\right)t \approx (1 - 1.48 \times 10^{-8})t$$

下面将看到,地心处时钟的固有时正好等于地心坐标时。

3.2.4 地心系的度规和地心坐标时

在 GCRS 中的引力场线元为

$$ds^2 = G_{00}dX^0dX^0 + 2G_{0a}dX^0dX^a + G_{ab}dX^adX^b \quad (3.2.29)$$

其中,度规与引力势的函数关系由式(3.1.21)决定:

$$\begin{cases} G_{00} = 1 - \frac{2W}{c^2} + \frac{2W^2}{c^4} + O(6) \\ G_{ab} = -\delta_{ab}\left(1 + \frac{2W}{c^2}\right) + O(4) \\ G_{0a} = \frac{4W^a}{c^3} + O(5) \end{cases} \quad (3.2.30)$$

引力势包括两部分,分别是地球产生的引力势和除地球外的天体以及惯性效应产生的外部势:

$$\begin{cases} W = W_E + W_{\text{ext}} \approx W_E + W_{\text{tidal}} \\ W = W_E + W_{\text{ext}} \approx W_E \end{cases} \quad (3.2.31)$$

由于地球质心在 GCRS 中静止,其引力标势和矢势分别为

$$\begin{cases} W_E(X) = \frac{\mu_E}{X} \left(1 - \frac{J_{2E}R_E^2P_2(\vartheta)}{X^2}\right) \\ W_E(X) = \frac{GJ_E \times X}{2X^3} \end{cases} \quad (3.2.32)$$

它与式(3.2.25)的关系满足引力势变换式(3.2.20)。

外部势相对于地球产生的引力势是一小量,在式(3.2.31)中近似取

$$W_{\text{ext}} \approx 0, \quad W_{\text{ext}} \approx W_{\text{tidal}}$$

这是因为,外部引力对引力势的贡献除了产生潮汐势外,还导致地球产生测地进动、Lense-Thirring 进动以及 Thomas 进动,但效应极其微弱,如测地进动使得地球产生 $0.01''/\text{yr}$ 的附加转动(详见 7.3.3 节和 7.3.4 节)。

外部引力既在场点产生引力势 $w_{\bar{E}}(\mathbf{x})$, 还在地心产生引力势 $w_{\bar{E}}(0)$, 导致地心在 BCRS 中的加速度 $\mathbf{a}_E = \nabla w_{\bar{E}}(0)$, 在经典力学中称作牵连加速度。因而在场点处的引力势与惯性离心势共同构成所谓的引潮势或潮汐势:

$$W_{\text{tidal}}(\mathbf{X}) = w_{\bar{E}}(\mathbf{x}) - (w_{\bar{E}}(0) + \mathbf{X} \cdot \nabla w_{\bar{E}}(0)) \quad (3.2.33)$$

其中

$$w_{\bar{E}}(\mathbf{x}) = \sum_{K \neq E} w_K(\mathbf{x}), \quad w_{\bar{E}}(0) = \sum_{K \neq E} w_K(0)$$

右边第 1 项是场点处的外部引力势, 后 2 项为惯性离心势, 是由于 GCRS 在 BCRS 中的旋转运动引起的。这里没有考虑 GCRS 原点的实际世界线与外场作用下运动轨迹的偏离, 即假设了 GCRS 原点的加速度等于外场的梯度 $\mathbf{a}_E = \nabla w_{\bar{E}}(0)$ 。

将除地球外的天体 $K (K = S, L, \dots)$ 看成质点, 在 BCRS 中的位置矢量为 \mathbf{r}_K , 则它们相对于地心的矢径为 $\mathbf{r}_{KE} = \mathbf{r}_E - \mathbf{r}_K$, 由于 $r_{KE} \gg x$, 它们在场点 \mathbf{x} 处的引力势为

$$\begin{aligned} w_K(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_K}{|\mathbf{r}_{KE} + \mathbf{x}|} = \mu_K \left(\frac{1}{r_{KE}} - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{r}_{KE}}{r_{KE}^3} - \frac{x^2}{2r_{KE}^3} + \dots \right) \\ &= w_K(0) + \mathbf{x} \cdot \nabla w_K(0) - \frac{\mu_K}{2r_{KE}^3} x^2 + \dots \end{aligned}$$

将上式代入式(3.2.33), 并对空间坐标按式(3.2.2)作非相对论转换到 GCRS, 就得到

$$W_{\text{tidal}}(\mathbf{X}) \approx -\frac{1}{2} \sum_{K \neq E} \frac{\mu_K}{X_K^3} \delta_{ab} X^a X^b = \frac{1}{2} G_{ab}^{\text{tidal}} X^a X^b \quad (3.2.34)$$

其中, $X_K = r_{KE}$ 为天体 K 到地心的距离。关于 G_{ab}^{tidal} 和外部势的高精度相对论表述可参见有关文献。

我们来讨论地球周围观测者的固有时与地心坐标时的关系。根据式(3.2.29)、式(3.2.30), 二者的关系是

$$d\tau = dT \left[1 - \frac{1}{2c^2} (2W + V^2) - \frac{1}{2c^4} (V^4/4 + 3W_0 V^2 - W_0^2 - 8\mathbf{W} \cdot \mathbf{V}) \right] \quad (3.2.35)$$

对于地球周围的航天器, $V < 1000 \text{ m/s}$, 式(3.2.35)右边带 c^{-4} 部分的量级不大于 10^{-18} s, 我们仅考虑前两部分, 这实际上是取 1PN 度规。于是有

$$\tau = T - \frac{1}{c^2} \int_0^T (W_E + W_{\text{ext}} + V^2/2) dT \quad (3.2.36)$$

这就是地球周围观测者的时钟所记录的时间 τ 与 1PN 地心坐标时 $T = \text{TCG}$ 的关系, 相对论修正项导致两个时间的相对误差量级约为 10^{-8} s/s 。

对于静止于地球质心处的时钟, 满足条件 $\mathbf{X} = \mathbf{V} = 0, W_{\text{ext}}(0) = 0, W_{\text{E}}(0) \approx 0$, 故有

$$\tau|_{\mathbf{X}=0} = T \quad (3.2.37)$$

可见, 地心坐标时在数值上等于地心处时钟记录的固有时间, 这与式 (3.2.28) 是相符的。

3.2.5 地球系的度规和地球时

地球参考系是指空间坐标系固联于地球, 时间坐标仍然采用地心坐标时的参考系, 简称地球系 (Terrestrial Reference System, TRS)。地球系的空间坐标系 $\{X'^a | a = 1, 2, 3\}$ 一般取国际地球参考框架 (International Terrestrial Reference Frame, ITRF), 即以地心为原点, 地球极轴为 X'^3 轴, X'^1 轴指向格林尼治本初子午线, $X'^1 - X'^2$ 轴在赤道面内以地球自转角速度 $\boldsymbol{\Omega}_{\text{E}}$ 绕极轴转动。

TRS 与 GCRS 的关系类似于 2.1.4 节讨论过的爱因斯坦转盘。由于地球系 $\{X'^a\}$ 与地心系 $\{X^a\}$ 的坐标原点和 $X^3 (X'^3)$ 轴重合且坐标时相同, 二者的变换关系为

$$\begin{bmatrix} T' \\ X'^1 \\ X'^2 \\ X'^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Omega_{\text{E}} T & \sin \Omega_{\text{E}} T & 0 \\ 0 & -\sin \Omega_{\text{E}} T & \cos \Omega_{\text{E}} T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ X^1 \\ X^2 \\ X^3 \end{bmatrix} \quad (3.2.38)$$

将此变换代入式 (3.2.29), 得到地球系的 1PN 线元为

$$\begin{aligned} ds^2 = & \left(1 - \frac{2W}{c^2} - \frac{(\boldsymbol{\Omega}_{\text{E}} \times \mathbf{X}')^2}{c^2} \right) c^2 dT^2 \\ & - 2(\boldsymbol{\Omega}_{\text{E}} \times \mathbf{X}') \cdot d\mathbf{X}' dT - \left(1 + \frac{2W}{c^2} \right) \delta_{ab} dX'^a dX'^b \end{aligned} \quad (3.2.39)$$

式中: $T = \text{TCG}$ 仍然是地心坐标时, $\boldsymbol{\Omega}_{\text{E}} \times \mathbf{X}'$ 为物体随地球转动的速度。度规的时间分量 G'_{00} 中不仅包含引力势, 还与随地球转动的速度有关, 因为在 \mathbf{X}' 处随地球转动的向心加速度为 $\mathbf{a}' = \boldsymbol{\Omega}_{\text{E}} \times (\boldsymbol{\Omega}_{\text{E}} \times \mathbf{X}')$, G'_{00} 中的第 3 项表示该处的向心势:

$$\int_0^{\mathbf{X}'} \mathbf{a}' \cdot d\mathbf{X}' = \int_0^{\mathbf{X}'} \boldsymbol{\Omega}_{\text{E}} \times (\boldsymbol{\Omega}_{\text{E}} \times \mathbf{X}') \cdot d\mathbf{X}' = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega}_{\text{E}} \times \mathbf{X}')^2$$

其中用到角速度为常矢量 ($d\boldsymbol{\Omega}_{\text{E}} = 0$)。按照爱因斯坦等效原理, 引力效应和加速度效应是同一性质的不同表现, 所以 G'_{00} 中第 2、3 项可以看成等效引力势:

$$W_{\text{eff}} = W + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega}_{\text{E}} \times \mathbf{X}')^2 \quad (3.2.40)$$

由式(3.2.39)可得到 TRS 中观测者的固有时

$$d\tau = dT \left[1 - \frac{1}{c^2} (W_{\text{eff}} + (\boldsymbol{\Omega}_{\text{E}} \times \mathbf{X}') \cdot \mathbf{V}' + V'^2/2) \right] \quad (3.2.41)$$

$\mathbf{V}' = d\mathbf{X}'/dT$ 是观测者在 TRS 中的速度,不同于在 GCRS 中的速度 $\mathbf{V} = \mathbf{V}' + \boldsymbol{\Omega}_{\text{E}} \times \mathbf{X}'$ 。如果观测者在 TRS 中静止($\mathbf{V}' = 0$),则得到 TRS 中静止固有时

$$d\tau_0 = dT \left(1 - \frac{W_{\text{eff}}}{c^2} \right) \quad (3.2.42)$$

从上面的讨论中可以看出,坐标时本身是一种理想状态,严格地说是指不存在引力场的无穷远处时钟记录的时间,这在工程上是无法实现的。但我们注意到,坐标时的关键条件是可以作为时间同步的标准,只要与惯性系时间成常比例的时间都可以作为坐标时。这就启示我们,可以将无穷远处时钟记录的时间替换为地球上某个时钟的记录,构造一个时间标准来替代坐标时。这就是地球时(Terrestrial Time, TT),它曾命名为“地心力学时(Terrestrial Dynamical Time, TDT)。

地球时是静止于大地水准面赤道上的时钟记录的时间。大地水准面是一个假想的由地球自由静止的海平面扩展延伸而形成的闭合曲面,通常被认为是地球真实轮廓,在最小二乘意义上可看成旋转椭球面即参考椭球面,位于赤道面的半长轴和极轴处的半短轴分别为 R_{eq} 和 R_{po} 。大地水准面是一个等势面,物体沿该曲面运动时地球引力不做功,但是由于等势面上不同地点的速度不同,即等效引力势不同,因而位于不同点的时钟走时率也是不同的。

在 TRS 中静止于赤道水准面上的时钟满足以下的条件

$$d\mathbf{X}' = 0, \quad \mathbf{X}' = R_{\text{eq}}, \quad \vartheta' = \pi/2$$

根据式(3.2.42)和式(3.2.32),该处时钟的静止固有时为

$$\begin{aligned} d\tau \big|_{\mathbf{X}=R_{\text{eq}}} &= \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\mu_{\text{E}}}{R_{\text{eq}}} \left(1 + \frac{J_{2\text{E}}}{2} \right) + \frac{\Omega^2 R_{\text{eq}}^2}{2} \right) \right] dT \\ &= (1 - 6.96927 \times 10^{-10}) dT \end{aligned} \quad (3.2.43)$$

据此,将左边的时钟固有时定义为地球时,经过精确计算,TT 与 TCG 的关系为

$$\begin{cases} d(\text{TT}) = (1 - L_{\text{C}}) d(\text{TCG}) \\ L_{\text{C}} = 6.969290134 \times 10^{-10} \end{cases} \quad (3.2.44)$$

相应地,也就得到了 TT 与 TCB 的关系

$$\begin{cases} d(\text{TT}) = (1 - L_{\text{B}}) d(\text{TCB}) \\ L_{\text{B}} = 1.550519768 \times 10^{-8} \end{cases} \quad (3.2.45)$$

其中的比例系数 L_B 是根据式(3.2.44)和式(3.2.15)求出来的:

$$1 - L_B = \left\langle \frac{\dot{T}T}{TCB} \right\rangle = \left\langle \frac{\dot{T}T}{TCG} \cdot \frac{TCG}{TCB} \right\rangle = (1 - L_G)(1 - L_C)$$

即

$$L_B = L_C + L_G + L_C L_G \quad (3.2.46)$$

顺便指出,为了在实际测量中使用方便,TRS 除了采用以地心为原点的空间坐标系 ITRF 外,也可以以观测站站心为原点建立地理坐标系。如图 3.2.4 所示,地理坐标系 $\{O', X'^a\}$ 的坐标原点 O' 在 TRF 中的矢径为 $X'_0 = (X'_0, \theta_0, \phi_0)$, ϕ_0 和 $\pi/2 - \theta_0$ 也是经纬度; $X'^1 - X'^2$ 为测站水平面, X'^3 竖直向上, X'^1 和 X'^2 指向正南和正东(也有文献采用 X'^1 和 X'^2 分别指向正东和正北的右手系)。

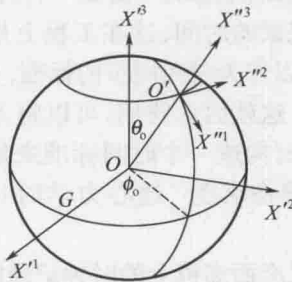


图 3.2.4 地球坐标系 $\{O, X'^a\}$ 与地理坐标系 $\{O', X'^a\}$

地理坐标系与 ITRF 的坐标变换关系为

$$\begin{bmatrix} X'^1 \\ X'^2 \\ X'^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'_0{}^1 \\ X'_0{}^2 \\ X'_0{}^3 \end{bmatrix} + R(\theta_0, \phi_0) \begin{bmatrix} X'^1 \\ X'^2 \\ X'^3 \end{bmatrix}$$

$R(\theta_0, \phi_0)$ 为 3 维空间转动变换矩阵,是两次平面转动的乘积,先绕 X'^3 轴逆时针转动 ϕ_0 角将 X'^2 轴转动到与 X'^2 平行,再绕 X'^2 轴逆时针转动 θ_0 角将 X'^3 轴转动到与 X'^3 平行,根据式(3.2.1)可知

$$R(\theta_0, \phi_0) = R_z(\phi_0) R_y(\theta_0)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta_0 \cos\phi_0 & -\sin\phi_0 & \sin\theta_0 \cos\phi_0 \\ \cos\theta_0 \sin\phi_0 & \cos\phi_0 & \sin\theta_0 \sin\phi_0 \\ -\sin\theta_0 & 0 & \cos\theta_0 \end{bmatrix}$$

3.2.6 相对论时间尺度及其相互关系

地球时是一种理想的时间标准,它的工程实现是国际原子时(International

Atomic Time, TAI)。

现代物理学发现,原子的能级跃迁所辐射或吸收的电磁波频率具有极高的稳定性和重复性。具有典型意义的是 Cs^{133} 原子基态 $6S_{1/2}$, 它的电子总角动量 $J=1/2$, 核自旋角动量 $I=7/2$ 。原子的总角动量是二者的耦合 $F=I+J, I+J-1, \dots, I-J$, 每一个总角动量对应的磁量子数为 $m_F=0, \pm 1, \dots, \pm F$ 。所以 Cs^{133} 原子基态的超精细能级为

$$F = I + J = 4, \quad m_F = 0, \pm 1, \dots, \pm 4$$

$$F = I - J = 3, \quad m_F = 0, \pm 1, \dots, \pm 3$$

实验证明, Cs^{133} 原子基态在两个超精细能级 $E_1(F=4, m_F=0)$ 和 $E_2(F=3, m_F=0)$ 之间的跃迁频率非常稳定。以此为基础, 国际上对时间尺度给出了一个严格而准确的定义: 处于海平面上的 Cs^{133} 原子基态的上述两个超精细能级在零磁场下跃迁辐射

$$\nu_0 = 9192631770$$

周的时间规定为 1 原子秒(SI 秒)。利用这个现象制造的铯原子钟, 稳定度好于 10^{-14} , 是目前世界上最精确的时钟。

国际原子时是根据分布于世界各地的 300 多台原子钟的时间比对数据, 进行数据处理确定的时间标准, 具有相当高的精确度, 不确定度小于 10^{-14} 。地球时是假设静止于地球赤道海平面上一台标准的原子钟所记录的时间, 与国际原子时的时间尺度相同但零点不同

$$\text{TT} - \text{TAI} = 32.184\text{s} \quad (3.2.47)$$

这个差值来源于 IAU 的规定: TAI 的 1977 年 1 月 1 日 0 时 0 分 0 秒(JD 2443144.5) 对应于 TT 的 1.0003725 日, 即 32.184s。规定了 TT 的时间起点后, TCB 和 TCG 与 TT 的积分关系为

$$\begin{cases} \text{TCB} - \text{TT} = L_B \Delta T \\ \text{TCG} - \text{TT} = L_G \Delta T \end{cases} \quad (3.2.48)$$

综上所述, 我们得到相对论时间尺度之间的相互关系: 如果说 TAI 是时间的实验标准, TT 则是理想的理论标准, 二者具有相同的走时频率或时间尺度(式(3.2.47)); TT 与 TCG 和 TCB 之间的转换是线性的(式(3.2.48)), 具有固定的尺度比例, 从而赋予坐标时实际的时间标准; 任意观测者的时钟频率取决于在引力场中的运动状态, 根据固有时与 TCB 和 TCG 的联系(式(3.2.26)和式(3.2.35))进而与 TT 和 TAI 建立测量关系。这就是图 3.2.5 表示的各种时间尺度的相互关系, 也是 IAU 对相对论时间尺度作出的明确规定。

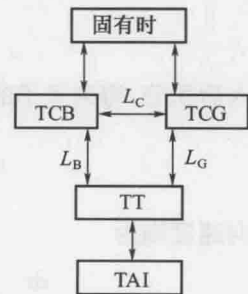


图 3.2.5 相对论时间尺度的相互关系

3.3 光传播轨迹和时间的后牛顿修正

从应用的角度来看,我们比较关心后牛顿引力理论是如何修正牛顿力学规律,从而得到物体的高精度运动轨迹和运行时间。同时,当物体的速度较小和引力场较弱的情况下应该退化为牛顿力学的结果。在本节讨论光子运动轨迹和传播时间的后牛顿修正,3.4节分析卫星运动轨迹的修正。

3.3.1 1PN 轨迹方程及其弯曲效应

先讨论简单情况。根据光子运动的 1PN 加速度式(3.1.50),当引力势 $w = \mu/r$ 时运动方程为

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{2\mu}{r^3} [\mathbf{r} - 2\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})] \quad (3.3.1)$$

如图 2.4.2 所示,在光传播平面建立直角坐标 $\{x, y\}$,光子矢径和光传播方向矢量与 y 轴夹角分别为 ϕ 和 φ ,则上式的分量式为

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = -\frac{2\mu}{r^2} [\sin\phi - 2\sin\varphi\cos(\varphi - \phi)] \\ \frac{dv_y}{dt} = -\frac{2\mu}{r^2} [\cos\phi - 2\cos\varphi\cos(\varphi - \phi)] \end{cases} \quad (3.3.2)$$

在经典力学中,光子的轨迹是速度为 c 的直线运动,因此可取光子轨迹的经典解作为零级近似代入上式右边,令 $\varphi = \pi/2$ 则有

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{2\mu\sin\phi}{r^2}, \quad \frac{dv_y}{dt} = -\frac{2\mu\cos\phi}{r^2} \quad (3.3.3)$$

将时间微分关系

$$dt = \frac{dl}{c} = \frac{r^2 d\phi}{cb}$$

代入后积分,得到光子的速度分量

$$v_x = c - \frac{2\mu}{cb}\cos\phi, \quad v_y = -\frac{2\mu}{cb}\sin\phi$$

径向速度则为

$$\frac{dr}{dt} = \sin\phi v_x + \cos\phi v_y = c\sin\phi - \frac{2\mu}{cb}\sin 2\phi \quad (3.3.4)$$

再对时间积分就得到光子的轨迹方程

$$r = \frac{b}{\cos\phi + \varepsilon}, \quad \left(\varepsilon = \frac{2\mu}{c^2 b} = \frac{R_g}{b} \right) \quad (3.3.5)$$

当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时上式退化为经典直线方程。

根据上式可求光线偏转角。令 $r \rightarrow \infty$, 得到

$$\cos\phi = -\varepsilon = -\frac{R_g}{b}$$

这表明远离引力源处的 ϕ 略大于 $\pi/2$, 二者差值的 2 倍即为偏转角

$$\alpha_{1PN} = 2\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2R_g}{b} \quad (3.3.6)$$

与史瓦西度规下的偏转角式(2.4.20)相同。

3.3.2 2PN 轨迹方程及其弯曲效应

求解物体在引力场中的运动方程可以采用两种方法：第一种是根据 3.1.5 节给出的后牛顿加速度解出物体的运动速度和位置。由于这个加速度表达式实际上就是引力场中的测地线方程(3.1.4), 在 2.4.1 节的证明过程表明, 测地线方程可由引力场的拉格朗日方程导出, 因此第二种方法是直接利用拉格朗日方程来求解, 其特点是很容易判断某些守恒量。这两种方法是等价的。下面采用第二种方法求解光子的 2PN 轨迹方程。

设天体的质量、半径、4 极矩参量和单位质量角动量分别为 $M, R, J_2, a = J/M$, 则引力标势和矢势分别为

$$\begin{cases} w = \frac{\mu}{r} \left(1 - \frac{J_2 R^2 (3\cos^2\vartheta - 1)}{2r^2} \right) \\ \mathbf{w} = \frac{\mu}{2r^3} (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \end{cases} \quad (3.3.7)$$

其中, ϑ 为场点矢径与自转轴夹角。以天体的质心为原点、自转轴为 Z 轴建立球坐标系 $\{r, \theta, \phi\}$, 则 $\vartheta = \theta$ 。在此坐标下的 2PN 线元为

$$ds^2 = g_u dt^2 + g_r (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2) + 2g_{\phi\vartheta} \sin\theta d\phi dt \quad (3.3.8)$$

$$\begin{cases} g_u = c^2 \left(1 - \frac{2w}{c^2} + \frac{2w^2}{c^4} \right) \\ g_r = - \left(1 + \frac{2w}{c^2} + \frac{2w^2}{c^4} \right) \\ g_{\phi\vartheta} = \frac{R_g a}{r} \end{cases} \quad (3.3.9)$$

其中, g_u 和 g_r 为 (r, θ) 的函数。

令拉格朗日函数

$$L = \frac{ds}{d\lambda} = [g_u \dot{t}^2 + g_r(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) + 2g_{t\phi} \sin \theta \dot{\phi} \dot{t}]^{1/2}$$

式中, “.” 号表示对仿射参量 λ 求导。由于拉格朗日函数中不包含坐标 t 和 ϕ , 可知 $\partial L / \partial \dot{t}$ 和 $\partial L / \partial \dot{\phi}$ 为常量, 即存在两个一次积分

$$\begin{cases} E = g_u \dot{t} + g_{t\phi} \sin \theta \dot{\phi} \\ J = -g_r r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} - g_{t\phi} \sin \theta \dot{t} \end{cases} \quad (3.3.10)$$

当 $r \rightarrow \infty$ 时, E, J 分别表示单位质量粒子的能量和角动量, 这时有

$$E \rightarrow c^2, \quad J \rightarrow r^2 \sin^2 \theta \frac{d\phi}{dt}$$

再取坐标 $x^2 = \theta$, 由拉格朗日方程

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

可得

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} (2g_r r^2 \dot{\theta}) = & -\frac{3\mu J_2 R^2}{r^3} \sin 2\theta \left[\left(1 - \frac{2w}{c^2} \right) \dot{t}^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{c^2} \left(1 + \frac{2w}{c^2} \right) (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) \right] \\ & + g_r r^2 \sin 2\theta \dot{\phi}^2 + 2g_{t\phi} \cos \theta \dot{\phi} \dot{t} \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

对于光子的运动, 由 $ds^2 = 0$ 又得到

$$g_u \dot{t}^2 + g_r(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) + 2g_{t\phi} \sin \theta \dot{\phi} \dot{t} = 0 \quad (3.3.12)$$

上面的方程式(3.3.10)、式(3.3.11)和式(3.3.12)是球坐标系下光子运动的基本方程, 原则上可以据此求得光子的轨迹方程。

下面讨论一种简单情况: $\theta = \pi/2$ 。在此条件下, 方程式(3.3.11)的右边为 0, 即 $g_r r^2 \dot{\theta}$ 为常量, 如果光子在初始时刻位于 $\theta = \pi/2$ 平面内且 $\dot{\theta} = 0$, 则它必定一直位于该平面内。这个结论与经典力学以及史瓦西场的情况相同。

由式(3.3.10)解出

$$\begin{cases} \dot{t} = \frac{g_r r^2 E + g_{t\phi} J}{g_{t\phi}^2 - g_u g_r r^2} \\ \dot{\phi} = \frac{g_{t\phi} E + g_u J}{g_{t\phi}^2 - g_u g_r r^2} \end{cases}$$

代入式(3.3.12)后令 $u = 1/r$, 略去高阶小量 $O(c^{-6})$, 得到 2 维轨迹方程

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 = \left(\frac{E}{cJ}\right)^2 \left(1 + \frac{4w}{c^2} \left(1 - \frac{Ea}{c^2 J}\right) + \frac{8w^2}{c^4}\right) \quad (3.3.13)$$

当 $\theta = \vartheta = \pi/2$ 时, 由式(3.3.7)有

$$w = \mu u \left(1 + \frac{1}{2} J_2 R^2 u^2\right)$$

将上式代入式(3.3.13)后, 再对 ϕ 微分一次就得到光子轨迹的微分方程

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = A + Bu + Cu^2 \quad (3.3.14)$$

$$A = \frac{R_g}{b^2} \left(1 - \frac{a}{cb}\right), \quad B = \frac{2R_g^2}{b^2}, \quad C = \frac{3J_2 R^2 R_g}{2b^2} \quad (3.3.15)$$

因为式(3.3.14)右边为高阶小量, 采用迭代法求解。当 $\mu = 0$ ($R_g = 0$) 时, 其解应退化为直线方程, 即零级近似解为

$$u^{(0)} = \frac{\cos\phi}{b}$$

代回到式(3.3.14)右边

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = A + \frac{B}{b} \cos\phi + \frac{C}{2b^2} (1 + \cos 2\phi)$$

得到 1 级近似解

$$u = A + \frac{\cos\phi}{b} + \frac{B}{2b} \phi \sin\phi + \frac{C}{2b^2} \left(1 - \frac{\cos 2\phi}{3}\right) \quad (3.3.16)$$

这就是光子在天体赤道平面 ($\theta = \pi/2$) 内的运动轨迹。

由于天体的角动量和 4 极矩对光线偏转的影响较小, 如果将它们忽略 ($J = 0, J_2 = 0$), 则 $\theta = \pi/2$ 的条件可以取消。这时的轨迹方程简化为

$$r = \frac{b}{\cos\phi + \varepsilon + \varepsilon^2 \phi \sin\phi}, \quad (J = 0, J_2 = 0) \quad (3.3.17)$$

这是忽略天体的自转和扁率情况下, 任意平面内光子的运动轨迹。与 1PN 轨迹方程式(3.3.5)比较, 分母中多出的 ε^2 项反映的是度规中标量势平方项的影响。

下面讨论光线偏转角。令 $u = 0$ ($r = \infty$), 由式(3.3.16)可得

$$\cos\phi = -Ab - \frac{B}{2} \phi \sin\phi - \frac{C}{2b} \left(1 - \frac{\cos 2\phi}{3}\right) \quad (3.3.18)$$

考虑光线经过太阳附近的传播, 即碰撞参数 $b = R_s = 6.96 \times 10^8 \text{ m}$, 取太阳引力半径和 4 极矩参数分别为 $R_{gs} = 2.953 \times 10^3 \text{ m}$, $J_{2s} \approx 10^{-6}$, 估算出右边 3 项的量级分

别是 10^{-3} 、 10^{-10} 和 10^{-10} , 因此零级近似解为

$$\cos\phi^{(0)} = -Ab, \quad \phi^{(0)} = \frac{\pi}{2} + Ab$$

将其代入后求得

$$\cos\phi = -\left(Ab + \frac{\pi B}{4} + ABb + \frac{2C}{3b}\right) \quad (3.3.19)$$

这表明 ϕ 略大于 $\pi/2$, 二者差值的 2 倍即为光线偏转角

$$\alpha_{2PN} = \frac{2R_g}{b} + \frac{\pi R_g^2}{b^2} - \frac{2aR_g}{cb^2} + \frac{2J_2 R^2 R_g}{b^3} + \frac{4R_g^3}{b^3} \left(1 - \frac{a}{cb}\right) \quad (3.3.20)$$

如果仅考虑 1PN 度规, 则式 (3.3.20) 右边仅存第 1 项, 这与 1PN 度规下的结论式 (3.3.6) 相同; 第 2 项是对球对称引力场的 2PN 修正, 来源于度规中引力源的质量平方项; 第 3 项是由于引力源的角动量引起的, 当 a 为正时偏转角减小, 当 a 为负时偏转角增大; 第 4 项来源于引力源的 4 极矩, 它导致偏转角增大; 最后一项的量级较小。当光线经过太阳表面时 ($b = R_s$), 估算出上式右边的第 2、3、4、5 项分别是第 1 项的 10^{-5} 倍、 10^{-7} 倍、 10^{-8} 倍和 10^{-10} 倍。因此, 当考虑光线偏转的精确表示时, 应该统一考虑引力源的质量平方、角动量和 4 极矩的作用。

顺便指出, Edery 在 2006 年求出了克尔度规下赤道平面内的光线偏转角

$$\alpha_{\text{Kerr}} = \frac{2R_g}{b} + \frac{15\pi R_g^2}{16b^2} - \frac{2aR_g}{cb^2}$$

与我们求得的上式右边前 3 项基本相同。

3.3.3 光传播时间的 2PN 引力延缓效应

在 2.4.5 节曾经讨论静态场中光传播时间的延缓效应, 这里进一步讨论稳态场的情况, 由于采用 2PN 度规, 本节的结论可以应用于多个引力源产生的引力场, 具有实际应用价值。

在有心力场中只需考虑平面运动, 设光源、引力源和观测者所在的平面为 $\{x^1, x^2\} = \{r, \phi\}$, 根据式 (3.1.21), 2PN 度规下的光传播方程为

$$\left(1 - \frac{2w}{c^2} + \frac{2w^2}{c^4}\right)c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2w}{c^2} + \frac{2w^2}{c^4}\right)dl^2 + \frac{8\mathbf{w} \cdot d\mathbf{r}}{c^2} dt = 0 \quad (3.3.21)$$

这是一个关于 dt 的二次方程, 忽略高阶小量 $O(c^{-6})$, 其解为

$$cdt = \left(1 + \frac{2w}{c^2} + \frac{2w^2}{c^4}\right)dl - \frac{4\mathbf{w} \cdot d\mathbf{r}}{c^3}$$

考虑到数量级关系, 仅在右边第 1 个标势用式 (3.1.29) 表示, 第 2 个标势 (即标

势平方项)不考虑4极矩影响,故有

$$cdt = \left(1 + \frac{2\mu}{c^2 r}\right)dl + \frac{2\mu^2}{c^4 r^2}dl - \frac{2G\mathbf{J} \times \mathbf{r}}{c^3 r^3} \cdot d\mathbf{r} + \frac{\mu J_2 R^2 (1 - 3\cos^2 \theta)}{c^2 r^3} dl \quad (3.3.22)$$

下面分别求这4部分的积分(见图3.3.1)。由于第1部分是主要的,我们仅在该部分沿光线的弯曲路径积分(取1PN光子轨迹方程),其余部分沿直线积分,即矢径分别取

$$r = \begin{cases} b/(\cos\phi + \varepsilon) & (\text{曲线}) \\ b/\cos\phi & (\text{直线}) \end{cases}$$

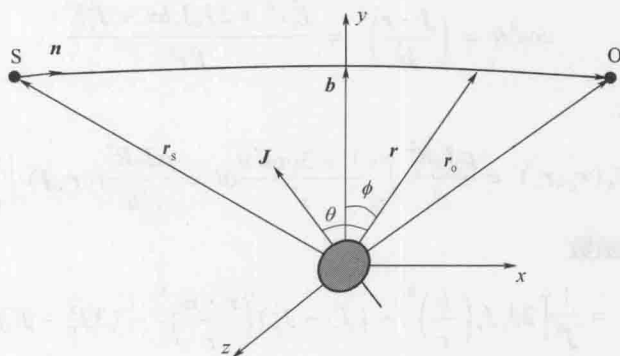


图 3.3.1 引力场中沿光线积分用图

第1部分的积分是

$$\begin{aligned} F_1(\mathbf{r}_o, \mathbf{r}_s) &= \int_{r_s}^{r_o} \left(1 + \frac{2\mu}{c^2 r}\right) \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2} d\phi \\ &= b \int_{r_s}^{r_o} \left(\frac{1 - \varepsilon^2}{(\cos\phi + \varepsilon)^2} + \frac{2\varepsilon}{\cos\phi + \varepsilon} + \varepsilon^2 \right) d\phi \\ &= b \left[\tan\phi + \varepsilon \ln \frac{1 + \cos\phi + \sin\phi}{1 + \cos\phi - \sin\phi} + \varepsilon^2 \phi \right] \Big|_{r_s}^{r_o} \\ &= |\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_s| + \left[\frac{2\mu}{c^2} \ln \frac{b + r + \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{b + r - \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}} + \frac{4\mu^2}{c^4 b} \cos^{-1} \frac{b}{r} \right] \Big|_{r_s}^{r_o} \quad (3.3.23) \end{aligned}$$

式中的小量 $\varepsilon = R_g/b < 10^{-5}$ 。注意: 如果沿直线积分, 其结果应为式(2.4.25)。

第2部分的积分很容易得出

$$F_2(\mathbf{r}_o, \mathbf{r}_s) = \frac{2\mu^2}{c^4} \int_{r_s}^{r_o} \frac{dl}{r^2} = \frac{2\mu^2}{c^4 b} \left(\arccos \frac{b}{r} \right) \Big|_{r_s}^{r_o} \quad (3.3.24)$$

第3部分中,因为光波平行于 x 轴传播(\mathbf{n}/e_x), $dy = dz = 0, y = b, z = 0$, 矢量的混合积为

$$(\mathbf{r} \times \mathbf{J}) \cdot d\mathbf{r} = (J_x y - J_y z) dx = J_z b dx$$

故有

$$F_3(\mathbf{r}_o, \mathbf{r}_s) = \frac{2G}{c^3} \int_{r_s}^{r_o} \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{J}}{r^3} \cdot d\mathbf{r} = \frac{2GJ_z}{c^3 b} \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r} \right) \Big|_{r_s}^{r_o} \quad (3.3.25)$$

第4部分中的 θ 是天体的自转轴(对称轴)与场点矢径的夹角,因为自转轴与角动量的方向一致,因而有

$$\cos^2 \theta = \left(\frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{r}}{Jr} \right)^2 = \frac{J_x^2 x^2 + 2J_x J_y bx + J_y^2 b^2}{J^2 r^2}$$

该项的积分是

$$F_4(\mathbf{r}_o, \mathbf{r}_s) = \frac{\mu J_2 R^2}{c^2} \int_{r_s}^{r_o} \frac{1 - 3\cos^2 \theta}{r^3} dl = \frac{\mu J_2 R^2}{c^2 b^2} f(\mathbf{r}, \mathbf{J}) \Big|_{r_s}^{r_o} \quad (3.3.26)$$

式中:无量纲函数

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{J}) = \frac{1}{J^2} \left[2J_x J_y \left(\frac{b}{r} \right)^3 - (J_x^2 - J_y^2) \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r} \right)^3 - (3J_y^2 - J^2) \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r} \right] \quad (3.3.27)$$

将上面求出的4个函数($F_i(\mathbf{r}_o, \mathbf{r}_s) \mid i=1,2,3,4$)相加,终于得到单个引力源的引力场中光传播时间方程

$$\begin{aligned} c(t_o - t_s) = & |\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_s| + \frac{2\mu}{c^2} \ln \left(\frac{b + r_o + \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_o}{b + r_o - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_o} \times \frac{b + r_s - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_s}{b + r_s + \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_s} \right) \\ & + \frac{6\mu^2}{c^4 b} \left(\arccos \frac{b}{r_o} - \arccos \frac{b}{r_s} \right) + \frac{2GJ_z}{c^3 b} \left(\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_o}{r_o} - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_s}{r_s} \right) \\ & + \frac{\mu J_2 R^2}{c^2 b^2} (f(\mathbf{r}_o, \mathbf{J}) - f(\mathbf{r}_s, \mathbf{J})) \end{aligned} \quad (3.3.28)$$

式中: $\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_o$ 分别为光源和观测者相对于引力源中心的矢径; b 为光线到引力源中心的最小距离;角动量的分量(J_x, J_y, J_z)是以光传播平面为 x 和 y 向,光传播平面的法向为 z 向。

光在引力场中的传播时间在空间技术中有重要应用价值,讨论如下:

(1) 式(3.3.28)右边第1项是光波以 c 传播欧氏几何距离 $|\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_s|$ 的时

间,反映无引力场的情况;第2项主要是光线弯曲和坐标速度小于光速产生的时间延缓,可以粗略地认为这两项是1PN度规下的传播时间;后3项分别为引力源的质量平方 μ^2 、角动量 J 和4极矩参数 J_2 对时间延缓的贡献,这3项与瞄准距离 b 有关。

(2) 如果取引力源为太阳,它的引力常数、半径、角动量和4极矩等参数在国际单位制下的量级依次为

$$\mu_s \sim 10^{20}, R_s \sim 10^8, J_s \sim 10^{41}, J_{2s} \sim 10^{-6}$$

当光线经过太阳表面时($b = R_s$),估计出式(3.3.28)右边后4项的量级分别为 $10^{-5}\text{s}, 10^{-10}\text{s}, 10^{-10}\text{s}, 10^{-12}\text{s}$ 。如果考虑地球引力场,取地球的参数

$$\mu_E \sim 10^{14}, R_E \sim 10^6, J_E \sim 10^{33}, J_{2E} \sim 10^{-3}$$

当瞄准距离 $b = R_E$ 时这4项的量级是 $10^{-10}\text{s}, 10^{-20}\text{s}, 10^{-16}\text{s}, 10^{-14}\text{s}$ 。可见考虑地球引力场对光传播时间的影响时,只需考虑1PN度规即可。

(3) 由于DSX体系满足线性叠加原理,而实际的引力场是由多个引力源(如太阳、地球和月球等)产生的,这时可对各个引力源分别求解后叠加即可得到总的时间延缓,在X射线脉冲星导航中将详细讨论这个问题。

3.3.4 地球系中光传播时间的 Sagnac 效应

1913年,Sagnac发明了一种环形干涉仪。在旋转的平台上,将同一光源发出的一束光分解为两束,让它们在同一个环路内沿相反方向循环一周后会合在屏幕上,结果发现产生干涉现象,条纹移动数与平台转动速度和环路所围面积之积成正比。两束光发生干涉的实质是存在相位差,虽然二者在旋转平台上的传播距离相同但传播时间不相同,这种现象称作Sagnac效应。

地球系(TRS)在惯性系GCRS中旋转,当光在TRS中传播时也会产生Sagnac效应。从本质上来看是由于TRS的线元存在时空交叉项,下面证明它反映的正是Sagnac效应。

如图3.3.2所示,设TRS的时空坐标为 (ct, \mathbf{r}) , $t = \text{TCG}$ 为地心坐标时, $\mathbf{r} =$

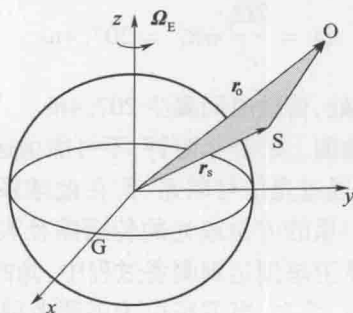


图 3.3.2 地球系的 Sagnac 效应

$(r, \phi, \theta) = (x, y, z)$ 是 TRF 下的球坐标和直角坐标。在 TRS 度规式(3.2.39)中令 $ds^2 = 0$, 得到光传播方程为

$$\left(1 - \frac{2w}{c^2} - \frac{(\boldsymbol{\Omega}_E \times \mathbf{r})^2}{c^2}\right) c^2 dt^2 - 2(\boldsymbol{\Omega}_E \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} dt - \left(1 + \frac{2w}{c^2}\right) dl^2 = 0 \quad (3.3.29)$$

式中: $dl = \sqrt{d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}}$ 为欧氏线元, 第 2 项中的因子可写成

$$(\boldsymbol{\Omega}_E \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \boldsymbol{\Omega}_E \cdot (\mathbf{r} \times d\mathbf{r}) = 2\boldsymbol{\Omega}_E \cdot d\mathbf{A}$$

$d\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times d\mathbf{r}$ 是矢径扫过的面积元, 方向指向面元的法向(或由右手法则判定)。

由此解出传播时间

$$dt = \frac{1}{c} \left(1 + \frac{2w}{c^2}\right) dl + \frac{2}{c^2} \boldsymbol{\Omega}_E \cdot d\mathbf{A} + O(c^{-4}) \quad (3.3.30)$$

因右边仅为空间的函数, 略去高阶小量后沿光的传播路径 $\mathbf{r}_s \rightarrow \mathbf{r}_o$ 积分

$$\Delta t = \frac{\Delta l}{c} + \frac{2}{c^2} \boldsymbol{\Omega}_E \cdot \mathbf{A} + O(c^{-3}) \quad (3.3.31)$$

右边第 1 项是 TRS 中光传播欧氏几何距离 Δl 的时间, \mathbf{A} 是 $\mathbf{r}_s \rightarrow \mathbf{r}_o$ 扫过的面积。于是, 光传播时间与传播欧氏几何距离 Δl 的时间之差为

$$\delta t = \Delta t - \frac{\Delta l}{c} = \frac{2\boldsymbol{\Omega}_E \cdot \mathbf{A}}{c^2} \quad (3.3.32)$$

这就是 Sagnac 效应。它表明当光的传播与地球转动方向相同时, $\boldsymbol{\Omega}_E \cdot \mathbf{A} > 0$, 传播时间要多出一个修正值 $2\boldsymbol{\Omega}_E \cdot \mathbf{A}/c^2$, 反之亦然。

例如, 如果在地球的赤道面上同一点发射两束光, 向东(与地球转动方向相同)传播的光波回到原处, 传播时间要比 $\Delta l/c = 2\pi R_E/c$ 多出

$$\delta t = \frac{2\Omega_E}{c^2} \pi R_E^2 = 207.4 \text{ ns}$$

而向西传播的光波回到原处, 传播时间要少 207.4 ns。

Sagnac 效应表明: 在地面上的静止时钟, 不可能由运动的卫星钟来直接进行校准。因为时钟校准应该通过光信号联系, 而在地球系中观测光的传播时间不仅取决于传播距离, 还与卫星的方位或光的传播路径有关。如果卫星位于观测者的偏西方向, 当光信号从卫星到达观测者过程中, 光的传播与地球转动方向相同, 传播时间要比 $\Delta l/c$ 大。反之, 当卫星位于观测者偏东方向时传播时间要小一些。这一现象在 GPS 实验中得到了认证。1984 年, 利用 GPS 卫星与全世界

的3个时间中心——美国的NBS、联邦德国的PTB和日本的TAO进行光波传输,完成了全球范围的Sagnac实验,其修正值为240~350ns,在误差范围内与理论计算值符合得很好。最近的卫星双向时间频率传递实验(TWSTFT)在更高精度内验证了该效应。

另外,如果能够测量光传播的时间差以及光矢径扫过的面积,根据式(3.3.31)也可以反过来求出地球的角速度。Michelson和Gale在1925年所作的测量地球转动速度的实验就是基于这一原理,该实验采用的长640m宽320m矩形光路的Michelson-Gale环形干涉仪。也正是基于这个原理,1963年发明了具有更高精度的激光陀螺仪,随着技术的不断改善,又发明了光纤陀螺仪和原子干涉仪,测量角速度的误差可以达到 $10^{-5}^{\circ}/\text{h}$ 。它们已经成为现代惯性导航和制导技术的重要仪器,在航空航天领域得到广泛应用。

3.4 卫星运行轨迹的后牛顿修正

在2.4.3节讨论了史瓦西场中质点的椭圆轨迹方程及其进动效应,在3.1.5节导出了后牛顿近似度规中质点运动方程,本节详细讨论卫星自由运行段轨迹及其后牛顿修正。首先简单介绍经典理论的地球卫星无摄和摄动运动方程,然后讨论BCRS和GCRS中相对论框架下的运动方程,提出可以将相对论效应看成对经典卫星轨迹的摄动,并分析对经典轨迹的影响。

3.4.1 卫星的经典无摄运动方程

根据牛顿引力定律,物体在引力场中的加速度与引力势的关系为(见式(2.1.2))

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\nabla w(\mathbf{r}) \quad (3.4.1)$$

考虑航天器在地球引力场中的运动,将地球看成质量为 M 的非旋转均匀球体,地球质量产生的引力势为 $w(r) = GM/r = \mu/r$ (本节中 μ 表示地心引力常数),得到运动方程:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} = 0 \quad (3.4.2)$$

顺便指出,式(3.4.2)对二体系统也适用,但其中的引力常数应改成 $\mu = G(m_1 + m_2)$ 。二体系统,是指两个物体 m_1, m_2 构成的孤立体系,它们在相互引力作用下绕体系质心旋转,例如,地球和月球构成地月系、太阳和地球构成的日地系,以及由一颗脉冲星和一颗伴星组成的脉冲双星系统,等等。

对式(3.4.2)点乘 $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ 得到 $\dot{E} = 0$,再作矢量叉积又有 $\dot{\mathbf{J}} = 0$,故存在两个

积分常量

$$\begin{cases} E = \frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} \\ J = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \end{cases} \quad (3.4.3)$$

此即能量守恒和角动量守恒律, E 为航天器单位质量的能量, 为动能和势能之和。 J 为航天器单位质量的角动量, 垂直于 \mathbf{r} 和 $d\mathbf{r}/dt$ 构成的平面即卫星轨道平面, 这表明仅考虑均匀球形地球作用时, 航天器轨道平面是惯性系中的不变平面。

在轨道平面内建立极坐标系 $\{r, \phi\}$, 根据极坐标的微分将式(3.4.2)写成分量式

$$\begin{cases} \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 + \frac{\mu}{r^2} = 0 \\ r \frac{d^2 \phi}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\phi}{dt} = 0 \end{cases}$$

利用式(3.4.3)并作变量替换, 得到卫星轨迹的微分方程

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{\mu}{J^2} \quad \left(u = \frac{1}{r} \right) \quad (3.4.4)$$

其通解为

$$r = \frac{J^2/\mu}{1 + e \cos \phi} \quad (3.4.5)$$

上式也称作 Binet 公式。这是一个二次曲线, $J^2/\mu = p$ 为半通径, 积分常数 e 决定了曲线的类型: $e > 1$ 时为双曲线, $e = 1$ 时为抛物线, $e < 1$ 时为椭圆。

下面讨论卫星运行段的椭圆运动。

根据椭圆半长轴 a 与近星点矢径 $r_p(\phi=0)$ 和远星点矢径 $r_A(\phi=\pi)$ 的关系 (见图 3.4.1):

$$a = \frac{r_p + r_A}{2} = \frac{J^2}{\mu(1 - e^2)}$$

得到卫星轨迹的半通径为

$$p = J^2/\mu = a(1 - e^2) \quad (3.4.6)$$

代入式(3.4.5), 得到卫星的轨迹方程的运动学表示

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \phi} \quad (3.4.7)$$

在卫星的近星点 ($\phi=0$), 速度只有切向分量, 由式(3.4.7)求得该点的矢径

和速度分别为

$$r_p = a(1 - e), \quad v_p = \sqrt{\frac{\mu(1 + e)}{a(1 - e)}}$$

所以能量守恒定律成为

$$E = \frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} \quad (3.4.8)$$

对于圆周运动($r = a$), 式(3.4.8)退化为我们熟知的 $v^2 = \mu/r$ 。

利用式(3.4.6), 单位质量角动量

$$J = r^2 \frac{d\phi}{dt} = \sqrt{\mu a(1 - e^2)}$$

两边乘以 dt 后对一个周期积分, 就得到

$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = \frac{2\pi}{P} \equiv n \quad (3.4.9)$$

式中: P 为卫星运行周期; $n = 2\pi/P$ 为卫星平均角速度。此即开普勒第三定律, 实际上是角动量守恒律对一个周期的积分表示。

以上结论是卫星运动的一般运动学规律, 但在实际应用中常常采用下节的形式。

3.4.2 卫星运动状态及其测量

如图 3.4.1 所示, 地心到卫星的矢径 r 与椭圆长轴夹角也称作真近点角 ϕ , 在实际测量中一般引入一个偏近点角 ψ , (一般文献中记作 E)。由图可知

$$a \cos \psi = ae + r \cos \phi = ae + \frac{a(1 - e^2) \cos \phi}{1 + e \cos \phi}$$

由此解出两个角度的关系为

$$\cos \psi = \frac{e + \cos \phi}{1 + e \cos \phi}, \quad \sin \psi = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{1 + e \cos \phi} \quad (3.4.10)$$

或者

$$\cos \phi = \frac{\cos \psi - e}{1 - e \cos \psi}, \quad \sin \phi = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \psi}{1 - e \cos \psi} \quad (3.4.11)$$

用真近点角和偏近点角表示的椭圆方程为

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \phi} = a(1 - e \cos \psi) \quad (3.4.12)$$

根据极坐标下的速度表示, 求得速度的分量

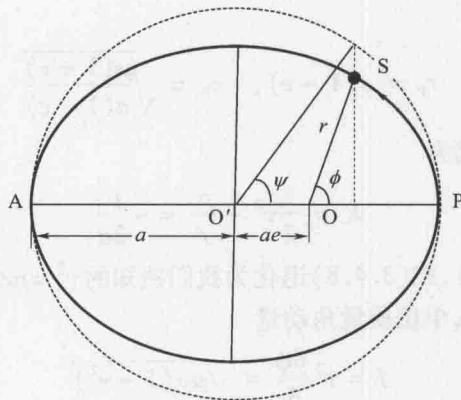


图 3.4.1 卫星运动轨迹平面图

$$\begin{cases} v_r = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \phi = a e \sin \psi \frac{d\psi}{dt} \\ v_\phi = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos \phi) = \frac{J}{a(1 - e \cos \psi)} \end{cases} \quad (3.4.13)$$

将上面两式代入能量守恒定律式(3.4.8)求得 a 后得到平均角速度

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = (1 - e \cos \psi) \frac{d\psi}{dt} \quad (3.4.14)$$

以卫星在近星点的时刻 t_0 ($\psi = 0$) 为初始时刻对两边积分, 即

$$\int_{t_0}^t n dt = \int_0^\psi (1 - e \cos \psi) d\psi$$

得到著名的开普勒方程

$$M = n(t - t_0) = \psi - e \sin \psi \quad (3.4.15)$$

式中: 定义的 M 对应于平均角速度, 故称作平近点角, 相当于卫星以平均角速度 n 做圆周运动所对应的圆心角。

通过求解开普勒方程, 可以获得卫星的瞬时运动状态。例如在卫星导航中, 从卫星星历中可以直接获得以下几个参数: 卫星椭圆轨道偏心率 e , 长半轴方根 \sqrt{a} ; 平均角速度误差 Δn ; 参考时刻 t_{oe} 的平近点角 $M(t_{oe})$ 。首先根据这些参数求得观测时刻 t 的卫星平近点角

$$\begin{aligned} M(t) &= n[(t - t_{oe}) + (t_{oe} - t_0)] \\ &= \left(\sqrt{\frac{\mu}{a^3}} + \Delta n \right) (t - t_{oe}) + M(t_{oe}) \end{aligned} \quad (3.4.16)$$

然后利用开普勒方程求观测时刻的偏近点角

$$\psi(t) = M(t) + e \sin \psi(t)$$

右边第2项为一小量,可采用迭代的方法求解

$$\psi^{(0)} = M$$

$$\psi^{(1)} = M + e \sin \psi^{(0)} = M + e \sin M$$

$$\psi^{(2)} = M + e \sin \psi^{(1)} = \psi^{(1)} + O(e^2), \dots$$

因为 $e \ll 1$, 迭代收敛很快, 一般迭代两三次即可解出精确结果。由 $\psi(t)$ 可解出观测时刻的真近点角。最后将 $\phi(t)$ 或 $\psi(t)$ 代入式(3.4.12)和式(3.4.13)就得到卫星在轨道平面 $\{e_r, e_\phi\}$ 上的瞬时位置 $r(t)$ 和速度 $v(t)$ 。

将上面的2维极坐标扩展为3维柱坐标 $\{e_r, e_\phi, e_w\}$, e_w 是轨道平面的法向单位矢, 则卫星状态 (r, v) 可以用柱坐标表示为

$$r = (r, 0, 0), \quad v = (v_r, v_\phi, 0) \quad (3.4.17)$$

为了后面的应用, 将其转换到 GCRS 的直角坐标系中。

如图3.4.2所示, GCRS的直角坐标 $\{e_x, e_y, e_z\}$ 可通过3次转动变换到柱坐标 $\{e_r, e_\phi, e_w\}$ 。先以 z 轴为转轴逆时针(逆着 z 轴看)转动角度 Ω , 使得 x 轴与 ON 重合; 再以 x 轴为转轴逆时针转动 i , 使得 z 轴与轨道面法向重合; 最后以 z 轴为转轴逆时针转动 $\omega + \phi$, 则 x, y, z 分别与柱坐标的径向、横向和法向重合。根据绕 x 和 z 轴的转动矩阵式(3.2.1), 可知上述3次连续转动的变换矩阵是

$$\begin{aligned} R(\Omega, i, \omega + \phi) &= R_z(\Omega) R_x(i) R_z(\omega + \phi) \\ &= \begin{bmatrix} (\cos(\omega + \phi) \cos \Omega & (-\sin(\omega + \phi) \cos \Omega & (\sin i \sin \Omega) \\ -\sin(\omega + \phi) \cos i \sin \Omega & -\cos(\omega + \phi) \cos i \sin \Omega & \\ (\cos(\omega + \phi) \sin \Omega & (-\sin(\omega + \phi) \sin \Omega & (-\sin i \cos \Omega) \\ +\sin(\omega + \phi) \cos i \cos \Omega & +\cos \omega \cos i \cos \Omega & \\ (\sin(\omega + \phi) \sin i) & (\cos(\omega + \phi) \sin i) & (\cos i) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

变换矩阵的逆矩阵 $R^{-1} = R^T$ 。由此得到坐标基矢 (e_x, e_y, e_z) 与 (e_r, e_ϕ, e_w) 的变换关系为

$$\begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = R(\Omega, i, \omega + \phi) \begin{bmatrix} e_r \\ e_\phi \\ e_w \end{bmatrix} \quad (3.4.19)$$

对于任意矢量 V , 在两个坐标系中的分量 (V_x, V_y, V_z) 与 (V_r, V_ϕ, V_w) 的变换关系与上式相同。

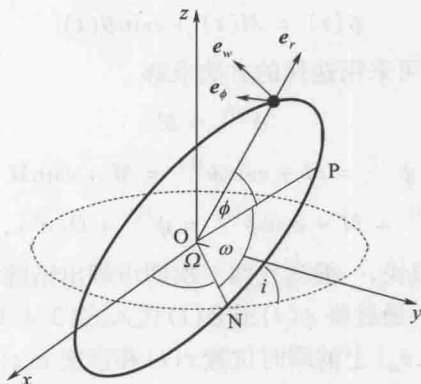


图 3.4.2 卫星运动轨迹立体图

N —升交点,卫星向东轨道与赤道面的交点; Ω —升交点赤经, ON 与地心系 X 轴的夹角;
 ω —近星点角距, ON 与近星点矢径 OP 的夹角; i —轨道倾角,轨道平面与赤道面的夹角。

3.4.3 卫星的经典摄动运动方程

上面两节的结论是将引力源地球看成均匀球对称天体,没有考虑地球的非均匀性和扁率(如地球多极矩)、其他天体的引力作用(如太阳和月球)以及非引力作用(如太阳光压),也没有考虑相对论效应的影响,等等。但实践证明这些因素的影响较小,可以作为微扰或摄动来加以考虑。在下面几节将要讨论相对论效应对卫星轨迹的摄动,这里先给出卫星摄动运动方程。

设卫星除了受到均匀球对称地球引力外,还受到其他摄动力的作用,这时的运动方程应将式(3.4.1)改成

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} = \mathbf{F}_p \quad (3.4.20)$$

其中, \mathbf{F}_p 为单位质量所受摄动力或摄动加速度,可分解为柱坐标系(e_r, e_ϕ, e_w)下的径向、横向和法向分量

$$\mathbf{F}_p = (R, \Phi, W) = \left(\frac{\delta v_r}{\delta t}, \frac{\delta v_\phi}{\delta t}, \frac{\delta v_w}{\delta t} \right) \quad (3.4.21)$$

式(3.4.20)的解可以表示为参数形式,即

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(a, e, M, \omega, \Omega, i) \quad (3.4.22)$$

其中的6个轨道根数或轨道要素分别是半长轴、偏心率、平近点角、近星点角距、升交点赤经和轨道倾角。在不存在摄动力的情况下,这些参数中的 $M = n(t - t_0)$ 是时间的线性函数,其余5个参数均为常数,即它们的时间变化率满足

$$\dot{a} = \dot{e} = \dot{\omega} = \dot{\Omega} = \dot{i} = 0, \quad \dot{M} = n \quad (\mathbf{F}_p = 0) \quad (3.4.23)$$

根据微分方程理论,在摄动力作用下($F_p \neq 0$)它们就应成为时间的函数,因此只需求出轨道根数的时间变化率。

由式(3.4.8)可知半长轴与速度的关系为

$$a = \frac{\mu}{2\mu/r - (v_r^2 + v_\phi^2)}$$

由于速度的变化 $\delta v_r, \delta v_\phi$, 导致半长轴的变化是

$$\delta a = \frac{2a^2}{\mu}(v_r \delta v_r + v_\phi \delta v_\phi)$$

将速度表达式(3.4.13)代入上式即可得到

$$\frac{\delta a}{\delta t} = \frac{2}{n \sqrt{1-e^2}} [e \sin \phi R + (1 + e \cos \phi) \Phi]$$

其余参数方程的推导可在有关文献中找到,归纳为

$$\begin{cases} \dot{a} = \frac{2}{n\sigma} [e \sin \phi R + (1 + e \cos \phi) \Phi] \\ \dot{e} = \frac{\sigma}{na} \left[\sin \phi R + \left(e + \left(1 + \frac{r}{a} \right) \cos \phi \right) \Phi \right] \\ \dot{M} = n + \frac{\sigma^2}{nae} \left[\left(\cos \phi - \frac{2er}{p} \right) R - \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin \phi \Phi \right] \\ \dot{\omega} = \frac{\sigma}{nae} \left[-\cos \phi R + \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin \phi \Phi - \frac{er}{p} \frac{\sin(\phi + \omega)}{\tan i} W \right] \\ \dot{\Omega} = \frac{\sigma}{na} \frac{r}{p} \frac{\sin(\phi + \omega)}{\sin i} W \\ \dot{i} = \frac{\sigma}{na} \frac{r}{p} \cos(\phi + \omega) W \end{cases} \quad (3.4.24)$$

此式称作高斯型摄动方程,式中的代号分别为

$$\sigma = \sqrt{1-e^2}, \quad \frac{r}{p} = \frac{1}{1+e \cos \phi} \quad (3.4.25)$$

摄动方程有一种简化表达式,条件是摄动力必须为保守力,可表示为某个势函数 $U(\mathbf{r})$ 的负梯度:

$$\mathbf{F}_p = (R, \Phi, W) = -\nabla U(\mathbf{r}) \quad (3.4.26)$$

由式(3.4.22)可知势函数也是6个轨道根数的函数,即

$$U(\mathbf{r}) = U(a, e, M, \omega, \Omega, i) \quad (3.4.27)$$

将摄动力(R, Φ, W)用势函数的偏导数表示代入高斯型摄动方程,则轨道根数的

变化率也可写成

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{a} = \frac{2}{na} \partial_M U \\ \dot{e} = \frac{\sigma}{na^2 e} (\sigma \partial_M U - \partial_\omega U) \\ \dot{M} = n - \frac{2}{na} \partial_a U \\ \dot{\omega} = \frac{1}{na^2} \left(\frac{\sigma}{e} \partial_e U - \frac{\cot i}{\sigma} \partial_i U \right) \\ \dot{\Omega} = \frac{1}{na^2 \sigma \sin i} \partial_i U \\ \dot{i} = -\frac{1}{na^2 \sigma \sin i} (\partial_n U + \cos i \partial_\omega U) \end{array} \right. \quad (3.4.28)$$

此式称作拉格朗日摄动方程。

另外,卫星径向位置是参数 a, e, M 的函数,即

$$r(a, e, M) = a(1 - e \cos \psi(e, M))$$

其中,函数关系 $\psi(e, M)$ 由式(3.4.15)确定。根据这些参数的变化 $(\delta a, \delta e, \delta M)$ 可以求出径向位置的变化量是

$$\begin{aligned} \delta r &= \partial_a r \delta a + \partial_e r \delta e + \partial_M r \delta M \\ &= \frac{\sigma^2}{1 + e \cos \phi} \delta a - a \cos \phi \delta e + \frac{ae}{\sigma} \sin \phi \delta M \end{aligned} \quad (3.4.29)$$

3.4.4 GCRS 中卫星的 1PN 轨迹

在经典力学规律的基础上,来讨论卫星轨迹的后牛顿修正,先分析简单情况。

在 GCRS 中的 1PN 线元为

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_u c^2 dt^2 - g_r (dr^2 + r^2 d\phi^2) \\ &= \left(1 - \frac{2w}{c^2} + \frac{2w^2}{c^4}\right) c^2 dt^2 + \left(1 + \frac{2w}{c^2}\right) (dr^2 + r^2 d\phi^2) \end{aligned} \quad (3.4.30)$$

令拉格朗日函数

$$L = \frac{ds}{d\tau} = \sqrt{g_u c^2 \dot{t}^2 - g_r (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2)}$$

其中,“.”号表示对固有时间 τ 求导。由于拉格朗日函数中不包含坐标 t 和 ϕ ,

由拉格朗日方程式(2.4.2)可知存在两个1次积分常数,亦即

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = C_1, \quad \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = C_2$$

注意到 $L=c$, 得到两个守恒量

$$E = c^2 g_u \frac{dt}{d\tau}, \quad J = r^2 g_\tau \frac{d\phi}{d\tau}$$

式中: E 和 J 为积分常量, 表示物体单位质量的能量和角动量。将上式代入式(3.4.30)消去 $\dot{t}, \dot{\phi}$:

$$c^2 = g_\tau \dot{r}^2 + \frac{1}{g_r} \left(\frac{J}{r} \right)^2 - \frac{1}{g_u} \left(\frac{E}{c} \right)^2$$

再令 $u = 1/r$, 得到1阶微分方程

$$\left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 + u^2 = \left(1 + \frac{4w}{c^2} + \frac{6w^2}{c^4} \right) \left(\frac{E}{cJ} \right)^2 - \left(1 + \frac{2w}{c^2} \right) \left(\frac{c}{J} \right)^2 \quad (3.4.31)$$

此式对任意的引力势均成立, 无论是单个或多个引力源。

如果取单个引力源, 将引力势 $w = \mu u$ 代入上式后再微分一次就得到卫星轨迹的2阶微分方程

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + (1 - 6k^2)u = \frac{\mu}{L^2} \quad (3.4.32)$$

其中

$$L = \frac{J}{\sqrt{2E^2/c^4 - 1}}, \quad k = \frac{\mu E}{c^3 J} \approx \frac{\mu}{cJ} \quad (3.4.33)$$

$$\begin{cases} E = c^2 \left(1 - \frac{2\mu}{c^2 r} + \frac{2\mu^2}{c^4 r^2} \right) \frac{dt}{d\tau} \\ J = r^2 \left(1 + \frac{2\mu}{c^2 r} \right) \frac{d\phi}{d\tau} \end{cases} \quad (3.4.34)$$

由于 E 和 J 均为常量, 式中的 L 是具有角动量量纲的常量, k 为无量纲常量。式(3.4.32)的解为

$$r = \frac{L^2(1 - 6k^2)/\mu}{1 + e \cos(1 - 3k^2)\phi} \quad (3.4.35)$$

这就是卫星的1PN轨迹方程, 因为 $\phi=0$ 时 r 最小, 故 ϕ 以近星点为起量点。

显然, 1PN 方程式(3.4.34)和式(3.4.35)与经典方程式(3.4.3)和式(3.4.5)不相同, 下面分析它们的区别。

首先将时间统一到 TCG, 由式(3.4.30)求得固有时与坐标时关系为

$$\frac{dt}{d\tau} = 1 + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{\mu}{c^2 r} + O(c^{-4})$$

代入式(3.4.34), 得到守恒量

$$\begin{cases} E = c^2 + \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} \\ J = r^2 \frac{d\phi}{dt} \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{3\mu}{c^2 r} \right) \end{cases} \quad (3.4.36)$$

这与经典能量和角动量

$$E_N = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r}, \quad J_N = r^2 \frac{d\phi}{dt}$$

的区别在于: 相对论守恒量 E 是指卫星单位质量的总能量, 包括静止能(c^2)以及动能($v^2/2$)和势能($-\mu/r$), 而经典力学中的能量 E_N 不含静止能, 相对论角动量不仅与位置而且与速度有关。

再来看运动轨迹。与史瓦西场中的情况相同(参见 2.4.3 节), 后牛顿轨迹也存在进动, 在一个周期内的进动角为

$$\delta\phi = 6\pi k^2 \approx \frac{24\pi^3 a^2}{c^2 P^2 (1 - e^2)} \quad (3.4.37)$$

式中: a, e, P 为卫星的半长轴、偏心率和周期, 这与史瓦西场中的进动角(见式(2.4.17))相同。对于 GPS 等高轨卫星, 由上式计算出一年的进动角约为 4×10^{-4} rad, 基本上可以忽略不计。于是轨迹方程可表示成

$$\begin{cases} r = \frac{p}{1 + e \cos(1 - 3k^2)\phi} \\ p = \frac{L^2}{\mu}(1 - 6k^2) = a(1 - e^2) \end{cases} \quad (3.4.38)$$

由式(3.4.33)和式(3.4.36)求得

$$p = \frac{L^2}{\mu}(1 - 6k^2) = p_N \left(1 + \frac{4\mu}{c^2 a} \right)$$

忽略偏心率的差别, 由上面两式得到经典轨道与后牛顿轨道的半长轴偏差为

$$a_N - a = \frac{4\mu}{c^2} = 2R_g \quad (3.4.39)$$

将地球引力半径 $R_{gE} = 0.887$ cm 代入上式, 求得地球卫星的相对论径向偏差为 1.774 (cm)。

我国上海天文台在 1983—1984 年对 LAGEOS 卫星所做的激光测距实验验证了上述结论,5 次测量数据分别为

$$a_N - a = 1.798, 1.790, 1.780, 1.751, 1.804\text{cm}$$

在误差范围内与理论计算值符合得很好。

3.4.5 GCRS 中卫星轨迹的 2PN 修正

根据 3.1.5 节的结论,以速度 \mathbf{v} 运动物体的后牛顿引力加速度为(见式(3.1.42))

$$\mathbf{a} = \nabla w + \frac{1}{c^2} [(v^2 - 4w) \nabla w - 4\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \nabla)w - 4\mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{w}] \quad (3.4.40)$$

这里仅考虑旋转球形地球的作用,卫星处的引力标势和矢势由地球质量和自转产生:

$$w = \frac{\mu}{r}, \quad \mathbf{w} = \frac{\mu \mathbf{a} \times \mathbf{r}}{2r^3} \quad (3.4.41)$$

式中:常矢量 $\mathbf{a} = (J/M)\mathbf{e}_z$ 为地球单位质量的角动量。根据矢量运算规则和 $\nabla \times (\mathbf{r}/r^3) = 0$ 可知矢势的旋度为

$$\nabla \times \mathbf{w} = -\frac{\mu \mathbf{a}}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = -\frac{\mu \mathbf{a}}{2r^3} (\mathbf{e}_z - \frac{3z}{r} \mathbf{e}_r)$$

将上述关系代入式(3.4.40),得到 GCRS 中卫星的 2PN 运动方程

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} = \frac{\mu}{c^2 r^3} \left[\left(\frac{4\mu}{r} - v^2 \right) \mathbf{r} + 4(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} + 2a\mathbf{v} \times \left(\mathbf{e}_z - \frac{3z}{r} \mathbf{e}_r \right) \right] \quad (3.4.42)$$

一般说来上式很难求到解析解,采用摄动的方法来求数值解。利用 GCRS 直角坐标与卫星轨道柱坐标的关系式(3.4.18)做转换,即

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_z &= \sin i \sin(\phi + \omega) \mathbf{e}_r + \sin i \cos(\phi + \omega) \mathbf{e}_\phi + \cos i \mathbf{e}_w \\ z &= r \sin i \sin(\phi + \omega) \end{aligned}$$

将式(3.4.42)右边的摄动加速度投影到 $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_w)$ 上,3 个分量分别是

$$\begin{cases} R_{\text{PN}} = \frac{\mu}{c^2 r^2} (4\mu/r - v^2 + 4v_r^2 + 2av_\phi \cos i/r) \\ \Phi_{\text{PN}} = \frac{2\mu}{c^2 r^2} (2v_r v_\phi - av_r \cos i/r) \\ W_{\text{PN}} = \frac{2\mu a \sin i}{c^2 r^3} [v_r \cos(\phi + \omega) + 2v_\phi \sin(\phi + \omega)] \end{cases} \quad (3.4.43)$$

式中: r, v_r, v_ϕ 分别由式(3.4.12)和式(3.4.13)确定。代入高斯型摄动方程式(3.4.24),得到

$$\begin{cases} \dot{a} = \frac{2}{n\sigma} [e \sin \phi R_{PN} + (1 + e \cos \phi) \Phi_{PN}] \\ \dot{e} = \frac{\sigma}{na} \left[\sin \phi R_{PN} + \left(e + \left(1 + \frac{r}{a} \right) \cos \phi \right) \Phi_{PN} \right] \\ \dot{M} = n + \frac{\sigma^2}{nae} \left[\left(\cos \phi - \frac{2er}{p} \right) R_{PN} - \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin \phi \Phi_{PN} \right] \\ \dot{\omega} = \frac{\sigma}{nae} \left[-\cos \phi R + \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin \phi \Phi_{PN} - \frac{er}{p} \frac{\sin(\phi + \omega)}{\tan i} W_{PN} \right] \\ \dot{\Omega} = \frac{\sigma}{na} \frac{r}{p} \frac{\sin(\phi + \omega)}{\sin i} W_{PN} \\ \dot{i} = \frac{\sigma}{na} \frac{r}{p} \cos(\phi + \omega) W_{PN} \end{cases}$$

在求得轨道根数等的变化量 $\Delta a, \Delta e, \Delta M$, 由式(3.4.29)得到摄动运动轨迹的径向偏差

$$\Delta r = \frac{\sigma^2}{1 + e \cos \phi} \Delta a - a \cos \phi \Delta e + \frac{ae}{\sigma} \sin \phi \Delta M$$

取卫星的椭圆轨道平面为黄道面, 长半轴、偏心率和周期为 GPS 卫星轨道数据, 即

$$a = 2.656 \times 10^7 \text{ m}, \quad e = 0.01, \quad P = 43080 \text{ s}, \quad i = \varepsilon, \quad \omega = \Omega = 0$$

进行数值计算, 可以求出径向偏差与时间的关系曲线, 极值在厘米量级, 这与上节 1PN 情况下的分析结果是吻合的。

顺便指出, 式(3.4.42)有一种简化表达式。从该式可以看出, 如果忽略地球自转作用($a=0$), 且当卫星轨迹的偏心率较小的情况下, 近似有

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \approx 0, \quad \frac{\mu}{r} \approx v^2, \quad v \approx v_\phi = \frac{J}{r}$$

$J = \sqrt{\mu a(1 - e^2)}$ 是经典轨迹的角动量, 这时的运动方程简化成

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \approx \frac{3\mu J^2}{c^2 r^5} \mathbf{r} \quad (3.4.44)$$

这个方程可以直接求解, 也可以采用拉格朗日摄动方程式求解。由于右边的摄动力为保守力, 可表示成

$$\begin{cases} \mathbf{F}_p = \frac{3\mu J^2}{c^2 r^5} \mathbf{r} = -\nabla U(\mathbf{r}) \\ U(\mathbf{r}) = \frac{\mu J^2}{c^2 r^3} = \left(\frac{\mu}{c}\right)^2 \frac{1-e^2}{a^2(1-e\cos\psi)^3} \end{cases} \quad (3.4.45)$$

因 $\psi = \psi(e, M)$, 势函数 $U(\mathbf{r}) = U(a, e, M)$, 求得 $\partial_a U, \partial_e U, \partial_M U$ 后代入拉格朗日摄动方程式(3.4.28), 即可解出轨道根数的时间变化率, 这里不做进一步讨论。

综合上面两节的讨论, 我们看到: 如果实际应用中测量精度要求不高, 在 GCRS 中的卫星运动采用经典加速度即可, 不必考虑相对论效应。但是, 这两节的结论对其他二体问题也适用, 例如, 地球绕太阳的公转运动, 太阳的引力半径 $R_{gs} = 2.953\text{km}$, 导致地球轨迹的径向偏差约为 4.5km , 这时就必须考虑相对论效应的影响了。事实上从式(3.4.45)可以看出, 后牛顿摄动势函数虽然反比于矢径的 3 次方, 但与引力源质量的平方 μ^2 成正比, 因此在引力源质量较大的情况下物体的相对论效应是不能忽略的。

3.4.6 BCRS 中卫星轨迹的 2PN 修正

广义相对论的近似理论 DSX 体系已经成功地建立了 BCRS 中物体的相对论运动方程, 它是在仅存在引力情况下最完整和最精确的方程, 加速度计算精度甚至优于 10^{-14}ms^{-2} 。另一方面, 由于现有测量技术和其他因素的制约, 高轨卫星的加速度和速度计算精度应分别为 10^{-8}ms^{-2} 和 10^{-4}ms^{-1} 。下面对有关文献所给方程做一些近似处理, 改造成适合于空间技术应用的方程。

设 BCRS 中的质心坐标时为 $t, \mathbf{r}_A, \mathbf{r}_E, \mathbf{r}_M$ 和 $\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_E, \mathbf{v}_M$ 分别是航天器、地心和月球在 BCRS 中的位置和速度矢量, 航天器相对于地心的位置和速度矢量则是

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_E, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_E$$

当考虑地球卫星运动时, 地球引力起主要作用, BCRS 中的引力势可以对 3.2.3 节的有关公式做进一步简化, 除地球、太阳和月球外的天体引力可忽略, 太阳的多极矩和引力矢势也可忽略。这样, 卫星处的引力标势是地球质量、地球多极矩、太阳和月球质量在卫星处产生的引力势之和

$$w_A(\mathbf{r}_A) = w_E(\mathbf{r}) + w_Q(\mathbf{r}) + w_E^-(\mathbf{r}_A) \quad (3.4.46)$$

其中

$$\begin{cases} w_E(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{r} \left(1 + \frac{2v_E^2}{c^2}\right) \\ w_Q(\mathbf{r}) = -\frac{\mu}{r} \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{J_n R^n P_n}{r^n} + \dots\right) \\ w_E^-(\mathbf{r}_A) = \frac{\mu_s}{r_A} + \frac{\mu_M}{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_M|} \end{cases} \quad (3.4.47)$$

式中：地球质量产生的引力势为对牛顿势 $w_0 = \mu/r$ 的修正； $\mu_s = GM_s$ 为太阳的引力常数； $\mu_m = GM_m$ 为月球的引力常数。因为考虑地球周围的情况，卫星处的引力势主要来自地球的公转和自转（见式(3.2.25)），即

$$w_A(\mathbf{r}) = \frac{\mu v_E}{r} + \frac{\mu \mathbf{a} \times \mathbf{r}}{2r^3} \quad (3.4.48)$$

地心处的引力标势和矢势则分别为

$$w_E(\mathbf{r}_E) = \frac{\mu_s}{r_E} + \frac{\mu_m}{|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_E|}, \quad w_E(\mathbf{r}_E) = 0 \quad (3.4.49)$$

将式(3.4.46)~式(3.4.49)分别代入2PN加速度表达式(3.4.40)，得到卫星和地球的加速度 \mathbf{a}_A 和 \mathbf{a}_E ，二者相减即为卫星相对于地球的引力加速度，可表示为4项之和：

$$\mathbf{a}_A - \mathbf{a}_E = \mathbf{a}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{a}_Q(\mathbf{r}) + \mathbf{a}_E(\mathbf{r}) + \mathbf{a}_{PN}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \quad (3.4.50)$$

式中： \mathbf{a}_0 、 \mathbf{a}_Q 和 \mathbf{a}_E 分别为地球质量、地球多极矩和日月引力摄动产生的加速度，即

$$\begin{cases} \mathbf{a}_0(\mathbf{r}) = \nabla w_0 = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \\ \mathbf{a}_Q(\mathbf{r}) = \nabla w_Q(\mathbf{r}) \\ \mathbf{a}_E(\mathbf{r}) = \nabla(w_E(\mathbf{r}_A) - w_E(\mathbf{r}_E)) \end{cases} \quad (3.4.51)$$

这里主要关心加速度的后牛顿修正项，它由含因子 c^{-2} 的项构成，即

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{PN}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = & \frac{1}{c^2} \left[(v_A^2 - 4w_A) \nabla w_A + 2v_E^2 \nabla w_0 \right. \\ & - 4\mathbf{v}_A(\mathbf{v}_A \cdot \nabla)w_A - 4\mathbf{v}_A \times \nabla \times w_A \\ & \left. - (v_E^2 - 4w_E(\mathbf{r}_E)) \nabla w_E(\mathbf{r}_E) + 4\mathbf{v}_E(\mathbf{v}_E \cdot \nabla)w_E(\mathbf{r}_E) \right] \end{aligned} \quad (3.4.52)$$

与前面3项加速度不同的是，后牛顿加速度与卫星的位置和速度都有关，下面将给出具体表达式。

另外，卫星除了受引力作用外还受到非引力作用产生的加速度，如太阳光压、大气阻力和控制推力等，非引力摄动加速度可表示为

$$\mathbf{a}_{NG} = \mathbf{a}_{\text{light}} + \mathbf{a}_{\text{drag}} + \mathbf{a}_{\text{thrust}} + \cdots \quad (3.4.53)$$

由于后牛顿引力理论满足线性叠加原理，允许将非引力作用产生的加速度与引力加速度直接相加，故BCRS中的卫星运动方程为

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} = \mathbf{a}_Q + \mathbf{a}_{\bar{E}} + \mathbf{a}_{PN} + \mathbf{a}_{NG} \quad (3.4.54)$$

右边 4 项均为小量,构成摄动加速度。对于高轨卫星,各个加速度的数量级如表 3.4.1 所列。由表可见,后牛顿修正项与太阳引力摄动和太阳光压的牛顿加速度是同一量级。因此当我们考虑地球多极矩、日月引力摄动和太阳光压的作用时,也应该同时计入相对论效应的影响。

表 3.4.1 卫星加速度的数量级比较

加速度	数值的量级/ ms^{-2}
a_0	1
a_Q	$10^{-5}(J_2), 10^{-7}(J_4)$
$a_{\bar{E}}$	$10^{-6}(\mu_M), 10^{-7}(\mu_S)$
a_{PN}	10^{-7}
a_{light}	10^{-7}

为了明显看出相对论效应的影响,不计地球多极矩、日月引力摄动及非引力的作用,相当于卫星仅受到球形地球的引力作用,这时的运动方程简化为

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} = \mathbf{a}_{PN}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \quad (3.4.55)$$

\mathbf{a}_{PN} 是由于相对论效应产生摄动加速度,由于它反比于 c^2 ,在精确到 10^{-8}ms^{-2} 的情况下可对式(3.4.52)做一些近似处理:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_{PN}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) &\approx \frac{1}{c^2} \left[(v_A^2 - 4w_A + 2v_E^2) \nabla w_0 - 4\mathbf{v}_A (\mathbf{v}_A \cdot \nabla) w_0 - 4\mathbf{v}_A \times \nabla \times \mathbf{w}_A \right] \\
 &= \frac{\mu}{c^2 r^3} \left[(4w_A - v_A^2 - 2v_E^2) \mathbf{r} + 4(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_A) \mathbf{v}_A - 4(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_A) \mathbf{v}_E \right. \\
 &\quad \left. + 4(\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_E) \mathbf{r} + 2a\mathbf{v}_A \times (\mathbf{e}_z - (3z/r)\mathbf{e}_r) \right] \\
 &\approx \frac{\mu}{c^2 r^3} \left[(4\mu/r + 5v_E^2 - v^2 + 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_E) \mathbf{r} + 4\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v}_E + \mathbf{v}) \mathbf{v} \right. \\
 &\quad \left. + 2a(\mathbf{v}_E + \mathbf{v}) \times (\mathbf{e}_z - (3z/r)\mathbf{e}_r) \right] \quad (3.4.56)
 \end{aligned}$$

第 1 步是因为 $w_A \approx w_0 + w_{\bar{E}}(\mathbf{r}_A) \approx w_0 + w_{\bar{E}}(\mathbf{r}_E) + \mathbf{a}_E \cdot \mathbf{r}$, 由于这 3 项的量级分别约为 $10^8, 10^8, 10^3$ (取 $r \approx 10^6 \text{m}$), 我们忽略了第 3 项包含地球加速度的影响; 第 3 步是将地球绕太阳的椭圆轨迹 ($e = 0.0167$) 看成圆周运动, 有近似条件 $w_A \approx \mu/r + v_E^2$ 。

将摄动加速度分解为径向、横向和法向分量:

$$\begin{cases} R_{\text{PN}} = \frac{\mu}{c^2 r^2} [4\mu/r + 5v_{\text{E}}^2 + 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_{\text{E}} - v^2 + 4(v_{\text{Er}} + v_r)v_{\text{r}} \\ \quad + 2a((v_{\text{E}\phi} + v_{\phi})\cos i - v_{\text{Ew}}\sin i \cos(\phi + \omega))/r] \\ \Phi_{\text{PN}} = \frac{2\mu}{c^2 r^2} [2(v_{\text{Er}} + v_r)v_{\phi} - a((v_{\text{Er}} + v_r)\cos i + 2v_{\text{Ew}}\sin i \sin(\phi + \omega))/r] \\ W_{\text{PN}} = \frac{2\mu a \sin i}{c^2 r^3} [(v_{\text{Er}} + v_r)\cos(\phi + \omega) + 2(v_{\text{E}\phi} + v_{\phi})\sin(\phi + \omega)] \end{cases} \quad (3.4.57)$$

式中: r 和 (v_r, v_{ϕ}) 为卫星相对于地心的状态量, 分别由式(3.4.12)和式(3.4.13)确定; $(v_{\text{Er}}, v_{\text{E}\phi}, v_{\text{Ew}})$ 为 BCRS 中地心速度的径向、横向和法向分量, 可根据地球星历数据 $(v_{\text{Ex}}, v_{\text{Ey}}, v_{\text{Ez}})$ 由关系式(3.4.19)转换得到, 即

$$\begin{bmatrix} v_{\text{Er}} \\ v_{\text{E}\phi} \\ v_{\text{Ew}} \end{bmatrix} = R^T(\Omega, i, \phi + \omega) \begin{bmatrix} v_{\text{Ex}} \\ v_{\text{Ey}} \\ v_{\text{Ez}} \end{bmatrix}$$

不难发现, 当 $v_{\text{E}} = 0$ 时, 式(3.4.57)退化为 GCRS 中的摄动力表达式(3.4.43), 这是合理的。

将上式代入高斯型摄动方程式(3.4.24), 采用上节的方法和数据做数值求解, 可以求出 BCRS 中卫星径向偏差与时间的关系曲线, 最大偏差值约为 4m。这是因为在 BCRS 中的摄动力包含了地心速度的作用, 要比 GCRS 中的摄动力大一些。因此得到结论, 即使 GCRS 中卫星轨迹的相对论效应可以忽略, BCRS 中的相对论修正也是不能忽略的。

参 考 文 献

- [1] 程宗颐, 严豪健, 朱文耀. 旋转非球形地球相对论效应对卫星轨道的影响. 天文学报, 1988, 29(4).
- [2] 费俊俊, 潘高田, 肖昱, 等. X 射线脉冲星自主导航的卫星运动方程. 空间科学学报, 2011, 31(2).
- [3] 宫衍香, 须重明. 二阶后牛顿光线方程. 天文学报, 2003, 44(4).
- [4] 韩春好, 黄天衣, 许邦信. 地心准 Fermi 坐标系与地心谱和坐标系. 中国科学(A), 1990, 20(12).
- [5] 韩春好. 相对论框架中的时间计量. 天文学进展, 2002, 20(2).
- [6] 黄天衣, 陶金河. 广义相对论框架中的 IAU 时间尺度和参考系. 天文学进展, 2001, 19(2).
- [7] 李国平. 关于二体问题经相对论修正后的解. 武汉大学学报, 1977, 23(4).
- [8] 刘林. 航天器轨道理论. 北京: 国防工业出版社, 2000.
- [9] 孙维瑾, 费俊俊, 肖昱, 等. X 射线脉冲星自主导航的光传播时间方程. 天文学报, 2008, 49(2).
- [10] 武文俊, 李志刚, 杨旭海, 等. 卫星双向时间频率传递中的 Sagnac 效应. 宇航学报, 2012, 33(7).
- [11] 姚敏, 朱圣源, 潘容士, 等. 地心系人造地球卫星的相对论效应. 天文学报, 1988, 29(2).
- [12] 肖昱, 费俊俊, 孙维瑾, 等. 二阶后牛顿光线轨迹方程. 天文学报, 2008, 49(2).

- [13] 须重明, 吴雪君. 广义相对论与现代宇宙学. 南京: 南京师范大学出版社, 1999.
- [14] 钟鸣乾. 行星重力的后牛顿近似对卫星作用的估计. 物理学报, 2001, 50(12).
- [15] 朱圣源, 潘容土, 严豪健, 等. 在广义相对论框架中处理人卫激光测距问题. 天文学报, 1988, 29(3).
- [16] Allan D W, Weiss M, Ashby N. Around the world relativistic Sagnac experiment. Science, 1985, 228.
- [17] Anderson R, Bilger H R, Stedman G E. Sagnac effect; a century of earth-rotated interferometers. Am J Phys, 1994, 62(11).
- [18] Ashby N, Allan D W. Coordinate time on or near the earth. Phys. Rev. Lett., 1984, 52(19).
- [19] Ashby N, Bertotti B. Relativistic perturbations of an earth satellite. Phys Rev Lett, 1984, 52(7).
- [20] Ashby N, Bertotti B. Relativistic effects in local inertial frames. Phys Rev(D), 1986, 34.
- [21] Ashby N. Relativity and the global positioning system. Physics Today, 2002, 6(5).
- [22] Ashtekar A, Magnon A. The Sagnac effect in general relativity. J Math Phys, 1975, 16(2).
- [23] Damour T, Soffel M, Xu C. General relativistic celestial mechanics I. Method and definition of reference systems. Phys Rev(D), 1991, 43(4).
- [24] Damour T, Soffel M, Xu C. 1992. General relativistic celestial mechanics II. Translational equations of motion. Phys Rev(D), 1992, 45(10).
- [25] Damour T, Soffel M, Xu C. 1993. General relativistic celestial mechanics III. Rotational equations of motion. Phys Rev(D), 1993, 47(8).
- [26] Damour T, Soffel M, Xu C. General relativistic celestial mechanics IV. Theory of satellite motion. Phys Rev(D), 1994, 49(2).
- [27] Edery A, Godin J. 2006. Second order Kerr deflection. General Relativity and Gravitation, 38(11).
- [28] Huagan M P. Post-Newtonian arrival-time analysis for pulsar in a binary system. ApJ, 1985, 296(1).
- [29] Klioner S A, Soffel M H. Relativistic celestial mechanics with PPN parameters. Phys Rev(D), 2000, 62(2).
- [30] Kopeikin S, Schafer G. Lorentz covariant theory of light propagation in gravitational fields of arbitrary-moving bodies. Phys Rev(D), 1999, 60(12).
- [31] Kopeikin S, Mashhoon B. Gravitomagnetic effects in the propagation of electromagnetic waves in variable gravitational fields of arbitrary-moving and spinning bodies. Phys Rev(D), 2002, 65(6).
- [32] Kopeikin S. Relativistic reference frames for astrometry and navigation in the solar system. AIP Conf. Proc. 2006, 886.
- [33] Nelson R A. Relativity fundamentals for time scales and astrometry. USNO Sixth DoD Astrometry Forum, 2002.
- [34] Nelson R A, Ely T A. Relativistic transformations for time synchronization and dissemination in the solar system. 38th Annual Precise Time and Time Interval (PTTI) Meeting, 2006.
- [35] Post E J. Sagnac effect. Review of Modern Physics, 1967, 39.
- [36] Sagnac G. The demonstration of the luminiferous aether by an interferometer in uniform rotation. Comptes Rendus, 1913, 157.
- [37] Sagnac G. On the proof of the reality of the luminiferous aether by the experiment with a rotating interferometer. Comptes Rendus, 1913, 157.
- [38] Soffel M H, Klioner S A, Petit G, et al. The IAU 2000 resolutions for astrometry, celestial mechanics, and metrology in the relativistic framework: explanatory supplement. The Astronomical Journal, 2003, 126.
- [39] Xiao Y, Fei B J, Sun W J, et al. The second-order post-Newton orbit equation of light. ChA&A, 2008, 32(4).

第4章 卫星导航的相对论效应

第1章~第3章介绍了狭义相对论、广义相对论以及后牛顿引力理论的基本内容,现在分析相对论在现代导航中应用。一般说来,大范围现代导航技术包括卫星导航、X射线脉冲星导航、空间惯性导航和天文导航,它们各有优缺点且适用于不同的应用环境。卫星导航虽然工程庞大,但定位精度高、覆盖范围广,适用于地面和近地空间的运动对象;而X射线脉冲星导航则弥补了卫星导航的不足,可以为大气层外的航天器导航且具有自主性;用于航天器的空间惯性导航也是一种自主导航,由于长期稳定性较差,可作为辅助导航手段;至于天文导航因其导航精度较差,相对论效应对测量精度的影响可以忽略。将在后面的4章分别讨论卫星导航、脉冲星导航和空间惯性导航的相对论效应。

卫星导航(Satellite Navigation, SNAV)是20世纪70年代初由美国和俄罗斯几乎同时发明的,它是以多颗人造地球卫星为导航星座,地面或近地空间的接收机通过与多颗卫星通信获得自身的空间位置、速度和时间等信息。目前,全球性卫星导航包括美国全球定位系统(Global Positioning System, GPS)、俄罗斯全球导航卫星系统(Global Orbiting Navigation Satellite System, GLONASS)、欧洲全球导航卫星系统(GALILEO)和我国研制开发的“北斗”卫星导航系统(COMPASS)等四大系统。区域性导航有美国广域增强系统(WAAS)、欧洲静止卫星导航覆盖系统(EGNOS)、日本准天顶卫星系统(QZSS)等。所有这些基于卫星的全球和区域导航子系统构成全球导航卫星系统(Global Navigation Satellite System, GNSS)。虽然各个卫星导航系统的运行方式和具体参数有所区别,但导航基本原理是相同的,以下的讨论主要集中于GPS和COMPASS。

SNAV涉及地球引力场中卫星的运动、光的传播以及时间和距离的高精度测量,这些正是相对论时空理论要解决的基本问题,应用相对论理论对SNAV进行研究应该是很自然的事。这不仅有益于提高导航系统的测量精度,为SNAV的现代化提供理论支持,同时也为广义相对论提供了一个很好的实验基地。

4.1 卫星导航的基本测量原理

4.1.1 卫星导航概述

20世纪70年代,美国军方认为,为了协调军队特别是海外部队的调动和

部署,指挥飞机、军舰、坦克以及导弹的布防和进攻,特别是为精确制导武器指引敌方目标,必须开发一种具有高精度的导航和定位装备,能够精确测定位于地面和近地空间任意一点目标的位置和运动速度。于是研制出全球定位系统(GPS),可以向全世界各地的用户实时地提供连续的3维位置、3维速度以及标准时间等多方面的信息,具有全球性、全天候和海陆空全能性的定时、定位和导航功能。经过海湾战争、科索沃战争和伊拉克战争的实际应用,GPS成为提高军队战斗力的强有力武器,它的巨大优越性引起各国军事家和科学家的高度重视。

SSNAV 是一个高科技通信的系统工程,由三部分组成:空间卫星系统、地面监测系统和接收机部分。卫星的空间分布大致均匀,可以保证地面或近地空间的任意一点能够与至少4颗卫星取得联系。卫星不间断地向用户发送定位信息,包括高精度的时间标准和自身的空间位置和速度等。地面监测系统负责控制和监测空间卫星的运行和调整,主要任务是:根据收集到的资料编制关于卫星轨道参数的导航星历,由注入站发送到各个卫星,每隔一段时间更新一次;将各个卫星和监测站的原子钟调整与主控站的原子钟同步,也就是以主控站原子钟为标准,将卫星钟与主控站标准钟的钟差改正数通过卫星提供给用户。在地面或近地空中的一个或多个接收机同时与4颗卫星进行无线电通信,接收卫星的信号,包括卫星的空间位置、运动速度和信号发射时间等,并测定信号的传播时间和频率、相位等参数,从而确定自己的精确位置和运动速度。

SSNAV 是世界测量史上的重大发明,开创了全球测量的新时代。它之所以先进,除了具有全球性、全天候、全能性和实时性等优点外,最主要的是它具有相当高的测量精度。在理论上,军用 SSNAV 的定位精度可达到厘米量级,为精确制导武器、远程精密探测和侦察等军事行动提供了强有力的技术保障,这是其他测量手段无法比拟的。可以预测,随着军事现代化的发展和高科技的进步,SSNAV 将更加完善、更加先进,测量精度将会不断提高。

SSNAV 在军事上的应用相当广泛,按照接收机所在位置大致可以归纳为三类:

(1) 将接收机配置于我方军事人员和军事装备如飞机、军舰、坦克上,可以协调军队的调动和布防,这对于多兵种联合作战和立体化的现代战争尤其重要。

(2) 接收机置于远程制导武器上,可以为其导航,提高命中精度。例如,在运动载体如导弹和炸弹上安装先进的接收机,不仅能获得精确的位置和速度信息,还能确定运动载体的姿态角。它们通过处理卫星信息,不断调整自身的运动状态,就能够相当精确的命中预定目标。

(3) 如果将接收机置于敌方的军事设施上,还可以提供打击目标的精确位置,指引我方的攻击。可以说,SSNAV 既是“千里眼”也是“指南针”,为军事对抗

中的“知己知彼”提供了强有力的帮助。现在,随着微电子和通信技术的提高, SNAV 不仅在军事而且在民用上得到了更加普遍的应用,发挥了越来越大的作用。毫无疑问,它将成为军事现代化的一个重要发展方向。

目前世界上已经运行和正在研制的能够覆盖全球的 SNAV 有四大系统:

(1) 美国的 GPS。空间系统有 24 颗(其中 3 颗备用)中高轨地球卫星,每颗卫星距地面高度为 20230km,运行周期为 11h58min,为地球自转周期(23h56min)的一半,均匀分布于 6 条轨道上,每条轨道有 4 颗卫星,轨道平面与地球赤道面的倾角(轨道倾角)为 55° ,两轨道平面的交角为 60° 。

(2) 俄罗斯的 GLONASS。与 GPS 不同的是该系统共有 24 颗卫星,分布于 3 条椭圆轨道上,轨道倾角为 64.8° ,两轨道平面的交角为 180° 。卫星的平均高度为 19390km,运行周期是 11h15min。

(3) 欧洲正在计划建立全球导航卫星系统 GALILEO。它的空间系统由 30 颗卫星组成(其中 3 颗备用),分布于 3 条圆形轨道上,轨道倾角为 56° ,卫星的平均高度为 23616km,运行周期是 13h。

(4) 我国自主开发研制的 COMPASS(BeiDou)卫星导航系统。2000 年建成的“北斗”一代是试验阶段,采用 2 颗地球静止轨道卫星,分别定位于赤道平面内东经 80° 和 140° ,距地面高度约 36000km,接收机需将自己的高程通过卫星反馈到北斗中心站,由中心站解算出定位信息并告知接收机。“北斗”二代于 2007 年开始启动,2012 年完成亚太区域导航,预计 2020 年覆盖全球。它的空间系统由 27 颗中轨卫星(MEO)、5 颗地球静止轨道卫星(GEO)和 3 颗倾斜同步轨道卫星(IGSO)组成,其中的中轨卫星分布于倾角为 55° 的 3 个轨道平面,平均高度为 21500km,运行周期是 12h55min,如图 4.1.1 所示。

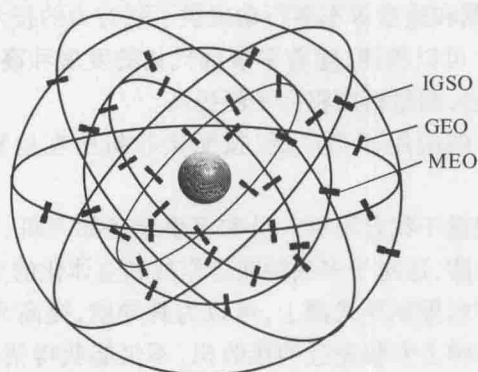


图 4.1.1 COMPASS 卫星系统

四大卫星导航系统的一些具体参数见表 4.1.1,其中的空间和时间系统将在 4.2.1 节介绍。

表 4.1.1 四大卫星导航系统的参数

	CAMPASS	GPS	GALILEO	GLONASS
卫星数	27MEO + 5GEO + 3IGSO	27MEO	30MEO	24MEO
轨道高度 /km	MEO 21500 GEO,IGSO 36000	MEO 20230	MEO 23222	MEO 19100
轨道平面	3	6	3	3
轨道倾角/(°)	55	55	54	64.8
运行周期	12h55min	11h58min	13h	11h15min
星历数据	轨道根数	轨道根数	轨道根数	位置和速度
空间坐标	CGCS2000	WGS-84	WGS-84	PZ-90
时间系统	BDT	GPST	GPST	GLONASST

4.1.2 卫星导航原理与光速不变性

设 4 颗卫星 $S_a (a=1,2,3,4)$ 分别位于 X^a 处,在 T^a 时刻发射光信号,接收机 P 同时接收到信号时的位置和时间为 X 和 T ,光波的传播速度为 c ,则接收机与 4 颗卫星的空间距离分别为

$$\Delta L^a = |X^a - X| = c |T^a - T|$$

在直角坐标系 $\{X, Y, Z\}$ 中,上式表示为

$$c^2(\Delta T^a)^2 - (\Delta X^a)^2 - (\Delta Y^a)^2 - (\Delta Z^a)^2 = 0 \quad (4.1.1)$$

当 4 颗卫星发射信号的时间和位置 (T^a, X^a, Y^a, Z^a) 已知时,由上面的 4 个方程 $(a=1,2,3,4)$ 即可唯一确定接收机的时间和位置 (T, X, Y, Z) 。式(4.1.1)就是 SNAV 测量的基本方程,实际应用的伪距测量方程和载波相位测量方程都是以此为基础。

从相对论的观点来看,以上原理可以用时空图 4.1.2 表示。在 3 维闵氏时空 $\{X^0, X^1, X^2\} \equiv \{cT, X, Y\}$ 中,设卫星 S_1 和 S_2 是 2 个已知的世界点,它们发射光波的世界线由其将来光锥表示。2 个光锥相交于两条线 P_0P_1 和 P_0P_2 ,对于某一特定的时刻 T ,则相交于两点 P_1 和 P_2 。如果观测者 P 接收到 S_1 和 S_2 的光信号,则它必定位于 S_1 和 S_2 的将来光锥的交点上,在接收时刻 T 这些交点只有两个,但可以根据实际情况淘汰其中一点,因而也就唯一确定了 P 点。由于这里的接收时间 T 也是一个变量,推广到 4 维闵氏时空 $\{X^\mu | \mu=0,1,2,3\}$ 时,应该由 4 个世界点 $S_a (a=1,2,3,4)$ 来确定它们的交点 P。如果已知 4 个卫星的时空坐标 $S_a(X^a)$,也就可以唯一确定接收机的坐标 $P(X^\mu)$ 。

用闵氏时空度规 $\eta_{\mu\nu}$ 表示,基本方程式(4.1.1)可写成

$$\eta_{\mu\nu}(X^{\mu a} - X^\mu)(X^{\nu a} - X^\nu) = 0 \quad (4.1.2)$$

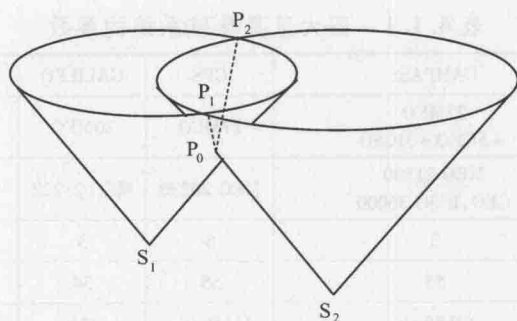


图 4.1.2 卫星导航原理的 3 维时空图

这正是 4 维闵氏时空的类光(零)测地线方程。所以,基本方程实际上假定了无论卫星和接收机是静止还是运动,光的传播速度恒为 c , 它的物理基础正是爱因斯坦的光速不变性。

对基本方程有以下两种等价的解释:

一种观点是将基本方程建立在惯性坐标系上,因为光速不变原理对惯性系成立,这时 (X^μ) 是具有测量意义的惯性系坐标。一般选取地心坐标系,即坐标原点建立在地球的质量中心,坐标轴指向遥远的恒星。虽然从广义相对论的观点来看,只有无引力且无转动的参考系才是惯性系,地心坐标系不是严格意义上的惯性系。但是可以采用这样的观点:认为运动学基础是闵氏时空,广义相对论是比牛顿的万有引力定律更精确的动力学理论。这样在忽略地球相对于遥远恒星加速运动的情况下,就可以将地心坐标系近似看成惯性系(故也称为地心惯性系)。在此坐标系中光沿直线传播且在真空中的速度恒定,式(3.1.2)就是惯性系中光子的世界线。至于引力导致的时空弯曲,将其看成是广义相对论效应的影响,作为一种微扰或摄动另行考虑。

另一种观点是直接应用广义相对论,因为在时轴正交的参考系中,用固有时和固有距离测量的光速是均匀和各向同性的,且在真空中恒为 c 。也就是说,用固有时和固有距离定义的速度也满足光速不变原理(见式(1.4.16))。因此可以直接将式(4.1.1)中的 ΔT 和 ΔL 解释为固有时和固有距离,应用广义相对论的规律求解。

上述两种观点虽然在理论上是不同的,但对于地球周围的弱引力场而言,不存在测量意义上的区别。并且在实际的测量中,广义相对论效应导致的误差小于工程技术和自然环境带来的误差,采用前一种观点可以将这些误差一并考虑,在应用上更为方便,下面将主要采用前一种观点来进行讨论。

4.1.3 卫星导航中的相对论效应

一般说来,由于地球的引力场很弱,应用牛顿引力理论足以精确计算地球周

围的一些运动情况。卫星导航是否需要考虑相对论效应呢?

我们来看 SNAV 对测量精度的要求,作为高精密度的定位系统,测量精度的误差范围非常小。最先进的军用距离测量误差 δL 要求在厘米量级,根据式(3.1.1)可知时间的测量误差 $\delta T = \delta L/c$ 约为 10^{-11}s ,卫星不间断地向地面发射光信号,传播时间约为 0.067s ,在一天中产生的频率误差(或稳定度)应在 $10^{-13} \sim 10^{-14}$ 。因此对高精密度的军用导航必须考虑导致误差大于 10^{-13} 的所有因素。这里不去讨论工程技术上的误差源,例如,由于对流层和电离层对光速的影响,以及因技术原因产生的频率漂移等,仅考虑相对论效应对测量的影响。

SNAV 涉及到引力场中的时间测量、长度测量以及光波的传播,根据前面 3 章的介绍,应该包含以下的狭义和广义相对论效应:

(1) 时间膨胀效应——卫星相对于地面运动导致卫星钟的频率较小(见 2.4.5 节)。

(2) 引力频移——卫星与地面钟的引力势之差导致卫星钟的频率较大,引力频移与时间膨胀的综合效应仍导致卫星钟的频率较大(见 2.4.5 节)。

(3) 光波的 1 级多普勒频移——卫星发射光波的频率与接收机接收到的频率不相同,与卫星和接收机的相对接近或远离有关(见 2.4.6 节)。取卫星平均速度 $v = 3875\text{ms}^{-1}$,则该效应的量级为

$$\frac{v}{c} \approx 10^{-5} \quad (4.1.3)$$

该效应在卫星导航的多普勒计数测量中得到应用。

(4) 光波的 2 级多普勒频移(包括时间膨胀效应)——它是卫星钟和接收机的时间不同步造成的(见 2.4.6 节),其量级是

$$\frac{v^2}{c^2} \approx 10^{-10} \quad (4.1.4)$$

(5) 光波的引力频移——光波发射和接收到的频率的差值,还与卫星和接收机在引力场中的位置有关(见 2.4.6 节)。取接收机位于地球表面,接收机和卫星的径向距离分别为 $R_E = 6371\text{km}$ 和 $R_E + H_s = 26571\text{km}$,则引力频移的量级约为

$$\frac{\mu_E}{c^2} \left(\frac{1}{R_E} - \frac{1}{R_E + H_s} \right) \approx 10^{-9} \quad (4.1.5)$$

上述两个效应导致卫星与接收机的时间不同步,在一天中产生的偏差在 $40 \sim 50\mu\text{s}$,对 GPS 的光信号传播,导致距离测量误差约在千米量级。

(6) 光传播的时间延缓——光的传播受引力场的作用下产生弯曲,导致与无引力时直线传播的时间延缓(见 3.3.3 节)。该效应的量级约为

$$\frac{\mu_E}{c^3} \ln \frac{R_E + H_s}{R_E} \approx 10^{-11} \text{ s} \quad (4.1.6)$$

在 GPS 试验中的最大值约为 4.7ps。

(7) 光传播的 Sagnac 效应——在与地球固联的地球坐标系或地面坐标系中,测量光的传播时间时应该考虑光的传播方向带来的修正(见 3.3.4 节),该效应导致 GPS 中的最大误差约为 136ns。如果首先在 GCRS 中进行讨论,然后通过空间坐标变换转换到与地球固联的坐标系,也就是将地球的自转单独考虑,可以避开 Sagnac 效应带来的影响。

(8) 引力场中卫星运动方程——在经典力学中,卫星在地球引力作用下作椭圆运动,而广义相对论认为卫星轨迹是地球周围弯曲时空的短程线运动,二者的结论不完全相同(见 3.4.4 节)。不过这种相对论偏差很小,一般情况下可以忽略。

上面的效应(1)、(3)和(4)属于狭义相对论效应,其余是广义相对论效应。其中(1)~(7)等效应对卫星导航有明显影响,它们产生的时间误差都大于原子钟的稳定度。除此之外,还有地球扁率以及月球、太阳潮汐效应等产生的时间偏差,归纳为表 4.1.2。表 4.1.2 中的数值是指最大值,负号表示相对论效应导致时间减小,例如,时间膨胀效应使得 GPS 卫星钟的时间相对于没有该效应的时间每天减小 7.1μs。

表 4.1.2 卫星导航中的相对论效应

相对论效应	GPS	GALILEO	GLONASS
卫星钟的时间膨胀/ $\mu\text{s} \cdot \text{d}^{-1}$	-7.1	-6.3	-7.4
卫星钟的引力频移/ $\mu\text{s} \cdot \text{d}^{-1}$	45.7	47.4	45.1
卫星钟的综合效应/ $\mu\text{s} \cdot \text{d}^{-1}$	38.6	41.1	37.3
卫星椭圆运动产生的周期效应/ns	46	49	45
地球扁率产生的频移效应/ $\text{ns} \cdot \text{d}^{-1}$	0.5	0.4	0.8
地球扁率产生的周期效应/ps	38	33	50
月球潮汐效应/ps	1.2	1.8	1.0
太阳潮汐效应/ps	0.5	0.8	0.5
光传播的 Sagnac 效应/ns	136	155	131
光波径向传播引力频移/ps	-4.7	-9.1	-3.5
多普勒频移周期因子/ 10^{-12}	6.7	5.9	7.0

以上将相对论效应看成一种微扰或摄动,是以狭义相对论的惯性系作为标准。这种做法实际上认为时空是平直的,而广义相对论的时空弯曲则是对平直时空的修正,是比牛顿引力定律更为精确的动力学理论。例如,存在引力场时光的传播发生的弯曲,是相对于光在惯性系中沿直线传播而言。SNAV 的基本测

量方程是以光的直线传播为基础的,而引力弯曲导致的时间误差看成一种微扰,将其归入到测量方程的钟差部分,与其他的微扰(如对流层和电离层对光速的延缓)统一处理。再例如,由于引力和二级多普勒频移,卫星钟的固有时与导航系统时间存在钟差,GPS将这个钟差当成一种固定的误差,对卫星钟的频率进行调整来消除这个误差,使之与标准时同步。从相对论的角度来看,当引力场较弱且不随时间变化的情况下,上述处理是可行的。

综上所述,SNAV基本测量原理满足光速不变性,其实验数据可以检验相对论效应。因此说SNAV可以看成相对论的一个大实验,它是对相对论理论的验证,而不是如某些文献所说的是对相对论的否定。

4.2 卫星钟的相对论修正

4.2.1 卫星导航的时间和空间系统

卫星导航是一个系统工程,涉及到空间运行卫星、地面监测控制站以及遍布全球的接收系统,必须建立完整而严密的时间-空间参考体系。

世界四大卫星导航系统都是以TRS为空间参考系。COMPASS的参考系是中国大地坐标系统2000(China Geodetic Coordinate System, CGCS2000),与TRS一致。CGCS2000的实现参考于国际地球参考框架ITRF 97,历元为2000.0,坐标系原点是地球质量中心, Z 轴指向TRS参考极方向, X 轴是TRS参考子午面与通过原点且同 Z 轴正交的赤道面的交线。CGCS2000参考椭球的几何中心与坐标系的原点重合,旋转轴与 Z 轴一致,椭球的半长轴、扁率、转动角速度以及地心引力常数分别取

$$R_{\text{eq}} = 6378.137 \text{ km}$$

$$f = 1/298.257222010$$

$$\Omega_{\text{E}} = 7.292115 \times 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\mu_{\text{E}} = 3.986004418 \times 10^{14} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$$

CGCS2000与GPS和GALILEO采用的世界大地坐标系统WGS-84在实质上是—致的。

四大卫星导航时间系统的秒长都是以国际原子时TAI为基准的。COMPASS采用的北斗时(BeiDou Time, BDT)参考于协调世界时(Universal Time Coordinated, UTC),其秒长与TAI相同,起算历元是UTC2006年1月1日0时0分0秒。GPS和GALILEO的系统时间GPST与TAI的区别在于零点的规定不同:

$$\text{GPST} = \text{TAI} - 19 \text{ s}$$

而TAI的起算历元是1977年1月1日0时0分0秒。

TAI 是 TT 的工程实现 (见式 (3.2.49)), 下面来分析如何将 TT 引入到 GCRS 的时空度规中。

根据 3.2.4 节的结论, GCRS 的 1PN 度规为 (将大写字母改为小写):

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2w}{c^2}\right)c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2w}{c^2}\right)dl^2 \quad (4.2.1)$$

式中: $t = \text{TCG}$ 为地心坐标时; 因为在 1PN 度规中可忽略外部势 w_{ext} , $w = w_E + w_{\text{ext}} \approx w_E$ 是地球的引力标势, 由式 (3.2.32) 给出。在 3.2.6 节曾经说明, TT 是指静止于地球参考椭球赤道上时钟记录的时间, 定义该处的等效引力势为

$$W = \frac{\mu_E}{R_{\text{eq}}} \left(1 + \frac{J_{2E}}{2}\right) + \frac{(\Omega_E R_{\text{eq}})^2}{2} = c^2 L_G \quad (4.2.2)$$

式中: 常数 L_G 由式 (3.2.46) 给出。则地球时 $T = \text{TT}$ 与地心坐标时 $t = \text{TCG}$ 的关系式 (3.2.45) 可写成

$$dT = \left(1 - \frac{W}{c^2}\right)dt \quad (4.2.3)$$

它与坐标时的相对误差大于原钟的稳定度, 即

$$\frac{dt - dT}{dt} = \frac{W}{c^2} > 10^{-13}$$

且与坐标时成比例, 比例系数是略小于 1 的常数。现在, 改变时间尺度, 将 GCRS 时空线元中 TCG 替换为地球时 $dt \rightarrow dT$, 也就是将式 (4.2.3) 代入式 (4.2.1), 得到用地球时表示的地心系 1PN 度规为

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2(w - W)}{c^2}\right)c^2 dT^2 - \left(1 + \frac{2w}{c^2}\right)dl^2 \quad (4.2.4)$$

我们来说明以上的工作实际上是通过改变引力势的零点达到改变坐标时。牛顿引力势是以无穷远处为势能零点 $w|_{r=\infty} = 0$, 根据式 (4.2.1), 引力场中的静止固有时在无穷远处则是

$$d\tau_0 = \left(1 - \frac{2w}{c^2}\right)^{1/2} dt \xrightarrow{w=0} dt$$

即在引力势能的零点处, 静止固有时就是坐标时, 这个结论对渐近平直时空普遍成立。现在, 将引力势零点改为地球参考椭球赤道面的等效引力势, 由式 (4.2.4) 则有

$$d\tau_0 = \left(1 - \frac{2(w - W)}{c^2}\right)^{1/2} dT \xrightarrow{w=W_0} dT$$

由于 $w - W < w$, $dT < dt$, 所以将引力势的零点降低等效于坐标时间的尺度变小,

这种方法在理论物理研究中也经常采用。

必须指出：将地心坐标时 dt 替换为地球时 dT 的变换，并不改变任何真实的固有时 $d\tau$ 或静止固有时 $d\tau_0$ 的测量值，也不改变固有长度的测量，因为坐标变换不改变时空间隔。

4.2.2 卫星钟与系统标准钟的同步

以 GCRS 的时空间隔式(4.2.4)为基础展开讨论，其中的 dT 是卫星导航系统的标准时间，对 COMPASS 和 GPS 分别是 BDT 和 GPST。

根据该式可知引力场中运动物体的固有时与系统标准时的关系

$$d\tau = dT \left(1 - \frac{2(w - W)}{c^2} - \frac{v^2}{c^2} \right)^{1/2} \quad (4.2.5)$$

其中的固有速度 V 与坐标速度 $v = dl/dT$ 的关系是

$$V = \frac{dl}{dT} \left(\frac{1 + 2w/c^2}{1 + 2(w - W)/c^2} \right) \approx v \left(1 - \frac{W}{c^2} + \frac{2w}{c^2} \right)$$

注意到卫星的牛顿引力势以及等效引力势很小，可以将固有速度近似用坐标速度表示，这样卫星钟的固有时间为

$$d\tau_s \approx dT \left(1 - \frac{w_s - W}{c^2} - \frac{V_s^2}{2c^2} \right) \quad (4.2.6)$$

式(4.2.6)右边第2项是引力频移， $(w_s - W)$ 是卫星钟引力势与标准钟等效引力势之差；第3项是2级多普勒频移， v_s 是卫星相对于地心系的速度。由此即可算出标准时与各个卫星钟的钟差，实现各时钟的同步。

因为卫星的矢径较大，牛顿引力势可以不考虑地球扁率的影响，卫星的速度与矢径的关系由式(3.4.8)给出，即

$$w_s = \frac{\mu_E}{r_s} \quad V_s^2 = \frac{2\mu_E}{r_s} - \frac{\mu_E}{a}$$

代入式(4.2.6)并略去高阶小量，得到

$$\frac{d\tau_s - dT}{dT} = \frac{1}{c^2} \left(W - \frac{3\mu_E}{2a} \right) - \frac{2\mu_E}{c^2} \left(\frac{1}{r_s} - \frac{1}{a} \right) \quad (4.2.7)$$

式(4.2.7)将卫星钟相对于标准钟的钟差分成两部分：第1部分仅与卫星轨迹半长轴有关；第2部分是卫星在 r 和 a 处的引力势之差，是由于卫星的椭圆运动产生的，如果卫星做圆周运动则该部分为0。

现在考虑第1部分，它是围绕地球做圆周运动($r = a$)的卫星钟与系统标准钟的钟差，用频偏表示为

$$\zeta = \frac{d\tau_s - dT}{dT} = \frac{\nu_s - \nu_0}{\nu_0} = \frac{1}{c^2} \left(W - \frac{3\mu_E}{2a} \right) \quad (4.2.8)$$

注意式中的频率 ν_s (ν_0) 是指时钟的走时率, 时钟走得越快则频率越大, 与 $d\tau_s$ (dT) 成正比, 不要与光波的传播频率 f 相混淆。代入数据后, 频偏仅为圆周运动半径 a (单位为 10^6m) 的函数, 即

$$\zeta(a) = \left(6.9693 - \frac{66.525}{a} \right) \times 10^{-10} \quad (4.2.9)$$

图 4.2.1 给出了不同圆轨道半径与频移因子的关系曲线, 它是一条双曲线。从图中可以看出:

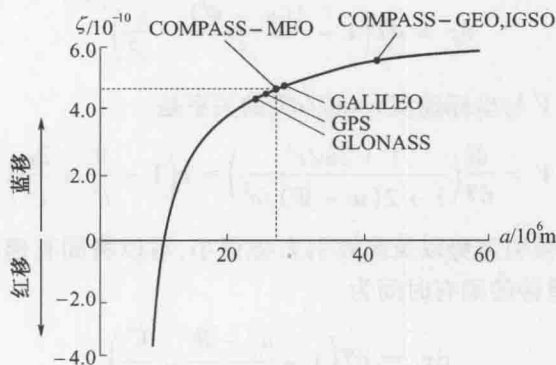


图 4.2.1 圆周运动卫星的半径与频移的关系

(1) 当卫星轨道半径 $a = 9545\text{km}$ 时, $\zeta(a) = 0$ 即 $d\tau_s = dT$ 。处于此轨道上的卫星的引力频移和 2 级多普勒频移刚好抵消, 不存在频移。

(2) 如果轨道半径 $a < 9545\text{km}$, 例如低轨卫星, 则 $\zeta(a) < 0$ 即 $d\tau_s < dT$ 。这是因为低轨道运行卫星的二级多普勒频移的作用大于引力频移, 导致钟速变慢, 当它向地面发射光波时, 地面观测者接收频率小于发射频率, 发生红移现象。

(3) 如果卫星轨道半径 $a > 9545\text{km}$, 例如 GPS 卫星 (26560km)、GLONASS 卫星 (25510km)、GALILEO 卫星 (29990km)、COMPASS 的中轨卫星 (27870km) 和同步卫星 (42370km), 则频偏 $\zeta(a) > 0$ 。因为高轨道运行的引力频移起主要作用, 产生蓝移现象。

可见处于运行轨道上的导航卫星钟的频率比标准钟稍快一些 ($d\tau_s > dT$), 且频偏是一个常数。为了保证与标准钟同步, 我们应将卫星的频率调小一些。设地面上原子钟的标称频率为 ν_0 , 进入轨道后变为 ν_s , 那么在地面上的频率调整为 ν'_s 后, 要使其进入轨道后的频率刚好变成 ν_0 , 则应有

$$\frac{\nu'_s}{\nu_0} = \frac{\nu_0}{\nu_s} = 1 - \zeta \quad (4.2.10)$$

经过这个调整,就可以一劳永逸地解决圆周运动卫星钟的相对论钟差。

例如对于 GPS 卫星,将卫星的半长轴代入式(4.2.9)得到频偏为

$$\zeta = \left(6.9693 - \frac{66.525}{26.561} \right) \times 10^{-10} = 4.4647 \times 10^{-10}$$

GPS 卫星携带的原子钟标称频率为 $\nu_0 = 10.23\text{MHz}$ 。实际情况是在卫星发射之前,在地面上将其频率调整为

$$\nu'_s = (1 - \zeta)\nu_0 = 10.22999999543\text{MHz}$$

这样在 GPS 卫星上天之后,它所携带时钟的真实频率就是标称频率 ν_0 。

4.2.3 卫星椭圆运动产生的钟差

对卫星做了频率调整后,式(4.2.7)变成

$$d(\tau_s - T) \equiv d(\delta t_s) = -\frac{2\mu_E}{c^2} \left(\frac{1}{r_s} - \frac{1}{a} \right) dT \quad (4.2.11)$$

这是卫星相对于圆周轨迹($r=a$)的偏离引起的钟差。将卫星的矢径 $r_s = a(1 - e\cos\psi)$ 代入上式,得到卫星钟的频移

$$\zeta = \frac{d(\delta\tau_s)}{dT} = -\frac{2\mu_E}{c^2 a} \frac{e\cos\psi}{1 - e\cos\psi} \quad (4.2.12)$$

它与卫星轨迹的角度有关,在近地点($\psi=0$)或远地点($\psi=\pi$)卫星偏离圆轨道最大。对 GPS 卫星,最大频偏约为 $3.3 \times 10^{-3}\text{ns/s}$ 。

将卫星运动的能量守恒定律式(3.4.14)代入式(4.2.12),并对卫星路径 l_s 积分,得到

$$\delta t_s = -\frac{2e\sqrt{\mu_E a}}{c^2} \int_{(l_s)} \cos\psi d\psi = -\frac{2e\sqrt{\mu_E a}}{c^2} \sin\psi + \text{常数}$$

上面的常数可以不予考虑,因为对所有的卫星都有相同的因子。代入数据后的卫星钟与标准钟的钟差为

$$\delta t_s = -\frac{2e\sqrt{\mu_E a}}{c^2} \sin\psi = -4.4428 \times 10^{-10} e \sqrt{a} \sin\psi \quad (4.2.13)$$

由 3.4.2 节的讨论可知,从卫星星历可以得到任意观测时刻的卫星轨迹偏心率 e 、半长轴方根 \sqrt{a} 以及偏近地角 ψ ,由式(4.2.13)即可求得该时刻卫星钟相对于标准时的钟差。例如对于 GPS 卫星,将数据代入后可得到钟差的最大值($\psi=\pi/2$)约为 23ns 。注意这个钟差是卫星轨迹的积累效果,假如在近地点时($\psi=0$)卫星钟得到校准,则它在前半个周期内的钟差为负,到远地点时($\psi=\pi$)

钟差为0,而在后半周期内的钟差为正。

另外,由卫星的轨迹和速度方程式(3.4.12)~式(3.4.14)还可得到

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} &= r v_r = a^2 e (1 - e \cos \psi) \sin \psi \frac{d\psi}{dt} \\ &= a^2 e \sin \psi \sqrt{\frac{\mu_E}{a^3}} = e \sqrt{\mu_E a} \sin \psi \end{aligned}$$

所以卫星钟差(式(4.3.13))也可以表示为

$$\delta t_s = - \frac{2 \mathbf{r}_s \cdot \mathbf{v}_s}{c^2} \quad (4.2.14)$$

由于卫星的矢径 \mathbf{r}_s 和速度 \mathbf{v}_s 均为已知量,可直接由此式确定钟差。这一表达式通常在接收机的计算机数据处理中使用。

以上是卫星轨道当成半长轴为 a 的理想椭圆运动处理,如果卫星在其他摄动力作用下偏离椭圆轨道,则还要产生附加的钟差。设卫星的轨道偏移量为 δa ,将式(4.2.8)中的频移因子看成 a 的函数,即

$$z(a) = \frac{\nu_s(a) - \nu_0}{\nu_0} = \frac{1}{c^2} \left(W - \frac{3\mu_E}{2a} \right)$$

对两边求变分,则有

$$\frac{\delta \nu_s}{\nu_0} = \frac{3\mu_E}{2c^2 a^2} \delta a \quad (4.2.15)$$

它表示当卫星轨道偏移 δa 时卫星钟频率的相对误差。此式也可以用卫星速度的变化量表示,根据卫星速度与半径的关系 $v^2 = \mu_E/a$ 求得

$$\delta v = - \frac{\mu_E}{2va^2} \delta a$$

故有

$$\frac{\delta \nu_s}{\nu_0} = - \frac{3v}{c^2} \delta v \quad (4.2.16)$$

如果由于某种原因使得卫星轨道半径增大 $\delta a > 0$,则速度变小 $\delta v < 0$,因而引力频移的增加(取决于 δa)大于2级多普勒频移的增加(取决于速度的变化量 δv),产生附加的蓝移;反之,当 $\delta a < 0$ 或 $\delta v > 0$ 时产生附加红移,这种情况可以从图4.2.1中明显看出。不过,这个附加钟差的量级很小,相对误差约为 $10^{-17} \delta a$ (a 以 m 计)。

4.2.4 关于卫星相对论钟差的讨论

根据上面的讨论,卫星钟与系统标准钟的关系为式(4.2.6)。然而,有关文献在论述这个问题时,将它看成是狭义相对论的时间膨胀与广义相对论的引力频移的综合效果,其表述如下:

设卫星钟和观测者时钟的频率分别为 ν_s 和 ν_o (正比于 $d\tau_s$ 和 $d\tau_o$), 卫星对于观测者的相对速度为 v_{so} 。根据狭义相对论的时间膨胀公式,有

$$\nu_s = \nu_o \left(1 - \frac{v_{so}^2}{c^2} \right)^{1/2} \approx \nu_o \left(1 - \frac{v_{so}^2}{2c^2} \right)$$

由此产生的频移为

$$\zeta_1 = \frac{\nu_s - \nu_o}{\nu_o} = -\frac{v_{so}^2}{2c^2} \quad (4.2.17)$$

广义相对论的引力效应导致的频移则是

$$\nu_s = \nu_o \left(\frac{1 - 2w_s/c^2}{1 - 2w_o/c^2} \right)^{1/2} \approx \nu_o \left(1 - \frac{w_s - w_o}{c^2} \right)$$

$$\zeta_2 = \frac{\nu_s - \nu_o}{\nu_o} = -\frac{w_s - w_o}{c^2} \quad (4.2.18)$$

故总的频移为

$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 = -\frac{w_s - w_o}{c^2} - \frac{v_{so}^2}{2c^2} \quad (4.2.19)$$

也有文献直接用卫星速度 v_s 表示,即

$$\zeta = -\frac{w_s - w_o}{c^2} - \frac{V_s^2}{2c^2} \quad (4.2.20)$$

我们认为这两种表述值得商榷:

(1) 式(4.2.17)和式(4.2.18)是分别在不考虑引力和考虑引力时的情况,前者在以观测者为参考点的惯性系中成立,后者对地心参考系中的静止标准钟成立,二者不能简单地相加。

(2) 如果式(4.2.17)是指狭义相对论的时间膨胀,在有引力时,它表示引力场中一固定空间点 S 处(例如卫星所在处),相对于 S 点以固有速度 V_s 运动的时钟 $d\tau_s$ 与该处的静止标准钟 $(d\tau_o)_s$ 存在时间膨胀效应,即

$$\frac{d\tau_s}{(d\tau_o)_s} = \left(1 - \frac{V_s^2}{c^2} \right)^{1/2}$$

同理,对另一固定空间点 O (例如地面观测者所在处),相对于 O 点以固有速度

V_0 运动的时钟与该处的静止标准钟有关系,即

$$\frac{d\tau_0}{(d\tau_0)_0} = \left(1 - \frac{V_0^2}{c^2}\right)^{1/2}$$

对不同的空间点(例如卫星和观测者所在的两处),不能直接应用狭义相对论的时间膨胀公式,因为在引力场中不同的空间点存在加速度。

(3) 式(4.2.18)是指引力场中两个固定空间点的静止标准钟而不是运动钟的引力频移,应是 $(d\tau_0)_s$ 和 $(d\tau_0)_0$ 的关系,而不是 $d\tau_s$ 和 $d\tau_0$ 的关系式(见式(2.3.2))。

$$\frac{(d\tau_0)_s}{(d\tau_0)_0} = \left(\frac{1 - 2w_s/c^2}{1 - 2w_0/c^2}\right)^{1/2}$$

由以上三式消去 $(d\tau_0)_s$ 和 $(d\tau_0)_0$, 得到

$$\begin{aligned} \frac{d\tau_s}{d\tau_0} &= \left[\left(\frac{1 - 2w_s/c^2}{1 - 2w_0/c^2} \right) \left(\frac{1 - V_s^2/c^2}{1 - v_0^2/c^2} \right) \right]^{1/2} \\ &\approx 1 - \frac{w_s - w_0}{c^2} - \frac{V_s^2 - v_0^2}{2c^2} \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

上面的固有速度已经近似用坐标速度表示, $V_s \approx v_s$, $V_0 \approx v_0$ 。当观测者静止于赤道海平面 ($d\tau_0 = dT$), 根据等效引力势的定义式(4.2.1)可知

$$w_0(r, \theta) + \frac{v_0^2}{2} = w\left(R_{\text{eq}}, \frac{\pi}{2}\right) + \frac{(\Omega_E R_{\text{eq}})^2}{2} = W$$

代入式(4.2.21)就得到式(4.2.6)。

根据式(4.2.21)得到的频移为

$$\zeta = \frac{d\tau_s - d\tau_0}{d\tau_0} = -\frac{w_s - w_0}{c^2} - \frac{V_s^2 - v_0^2}{2c^2} \quad (4.2.22)$$

显然, 上式右边第2部分的分子既不同于式(4.2.18)的

$$v_{s0}^2 = V_s^2 + v_0^2 - 2\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{v}_0$$

也不同于式(4.2.19), 仅当 $v_0 = 0$ 时这三者才相同。对于静止于赤道上的标准钟, 运动效应对频偏的贡献为

$$\frac{v_0^2}{2c^2} = \frac{(\Omega_E R_{\text{eq}})^2}{2c^2} \approx 1.2 \times 10^{-12}$$

这就是式(4.2.19)、式(4.2.20)误差的量级。可见, 上面提到的观点无论是在表述上还是在最终结果上都是错误的。

4.3 测码和测相伪距方程

SNAV 实际应用的测量方程有伪距测量方程(测码伪距方程)、载波相位测量方程(测相伪距方程)和多普勒计数测速方程。下面用相对论时空理论分析这些方程的物理意义,从而给出理论上的精确解释。至于实际应用中涉及的工程技术问题,例如,大气对流层和电离层等实际因素对方程误差的影响、方程的线性化和求解方法等,不在我们的讨论范围。

在本节中如无特别说明,坐标时是指系统标准时而不是地心坐标时,为书写方便,将 T 记作 t 。

4.3.1 测码伪距方程

如图 4.3.1 所示,卫星导航中的时间关系为

$$\tau_o - \tau_s = (t_o - t_s) + (\delta t_s - \delta t_o)$$

或简记作

$$\Delta\tau = \Delta t + \delta t \quad (4.3.1)$$

式中: $\Delta\tau = \tau_o - \tau_s$ 为卫星发射信号的钟面时 τ_s 和接收机接收信号的钟面时 τ_o 之差,它们是指引力场中理想时钟的固有时; $\Delta t = t_o - t_s$ 为卫星发射信号标准时 t_s 与接收机接收信号的标准时 t_o 之差,它们是全空间同步的坐标时; $\delta t = \delta t_s - \delta t_o$ 为接收机钟相对于卫星钟的钟差,其中 δt_s (δt_o) 是卫星(接收机)发射(接收)信号时的钟面时与标准时的差值。

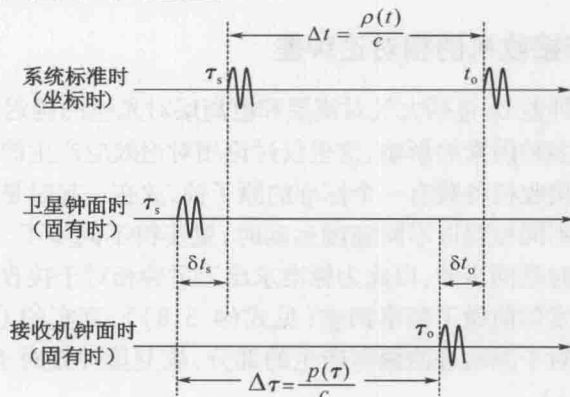


图 4.3.1 卫星导航中的时间关系

τ_s —卫星发射信号时的钟面时间(固有时); τ_o —接收机接收信号时的钟面时间(固有时);

t_s —卫星发射信号时的标准时间(坐标时); t_o —接收机接收信号时的标准时间(坐标时);

δt_s —卫星钟相对标准时间的钟差; δt_o —接收机钟相对标准时间的钟差。

将式(4.3.1)两边乘上真空中光速 c , 则得到

$$p(\tau) = \rho(t) + c\delta t \quad (4.3.2)$$

这就是测码伪距方程或伪距测量方程, 式中各项的物理意义如下: $p(\tau) = c\Delta\tau$ 为 GPS 的直接测量结果, 因为卫星和接收机时钟不同步, 该项并非任何真实距离, 故称为伪距;

$\rho(t) = c\Delta t \approx |\mathbf{r}_s(t_s) - \mathbf{r}_o(t_o)|$ 为“真距离”, 下面将说明将它看成卫星和接收机的真实距离或欧氏几何距离是不严格的;

$c\delta t$ 为卫星与接收机钟差的等效距离。

设 4 颗卫星发射信号时的矢径和钟面时分别为 $\mathbf{r}_s^a, \tau_s^a (a=1,2,3,4)$, 一个接收机同时(τ_o) 同地(\mathbf{r}_o) 与 4 颗卫星进行无线电通信, 也就得到 4 个伪距方程

$$c\Delta\tau^a = |\mathbf{r}_s^a(t_s^a) - \mathbf{r}_o(t_o)| + c(\delta t_s^a - \delta t_o) \quad (4.3.3)$$

式中: $\Delta\tau^a$ 为直接观测量。每颗卫星的位置和钟差 δt_s^a 可以由卫星给出的星历求出, 只有接收机的位置 $\mathbf{r}_o(x_o, y_o, z_o)$ 和钟差 δt_o 共 4 个未知量, 由上面的 4 个方程即可解出。这就是伪距测量的基本原理。

正如 4.1.2 节所分析的, 伪距测量方程的物理基础是光速不变性, 即光在真空中的速度 c 与卫星相对于接收机的运动状态无关。但我们知道光速不变性对无引力的惯性空间成立, 由于地球引力导致时空的弯曲, 有必要对一些问题进行澄清。下面从相对论时空理论的角度, 对伪距测量方程做详细分析, 并给出严格的结论。

4.3.2 卫星与接收机的相对论钟差

伪距方程中钟差 δt 包括大气对流层和电离层对光速的延迟, 以及工程技术上的频率漂移等多种因素的影响, 这里仅讨论相对论效应产生的钟差。

假设卫星和接收机各载有一个标准的原子钟, 放在一起时是完全同步的, 当它们在引力场中不同位置以不同速度运动时, 就变得不同步了。因为引力场中的坐标时即标准时是同步的, 以此为标准求出卫星钟相对于接收机钟的钟差。

考虑到卫星发射前做了频率调整(见式(4.3.8)), 真实的卫星钟的钟差只包括椭圆轨迹相对于圆轨迹的偏离产生的部分, 故卫星钟相对于标准时的钟差为(见式(4.2.12))

$$\delta t_s = t_s - \tau_s = \frac{2e\sqrt{\mu_E a}}{c^2} \sin\psi \quad (4.3.4)$$

根据式(4.2.6), 接收机钟相对于标准时的钟差为

$$\begin{aligned}\delta t_o &= t_o - \tau_o = \int_{(t_o)} \left(\frac{v_o^2}{2c^2} + \frac{w_o - W}{c^2} \right) dt \\ &= \left(\frac{v_o^2}{2c^2} + \frac{w_o - W}{c^2} \right) \Delta t\end{aligned}\quad (4.3.5)$$

式中：积分沿接收机运动路径(l_o)从 $t_s \rightarrow t_o$ ，最后一步是认为在此过程中接收机的位置和速度变化很小。

因为实际的接收机并不携带原子钟，以上的思路与实际的信号接收过程是一致的，可以用图 4.3.2 来说明：卫星在 t_s 时刻发射信号，与此同时，设想接收机时钟位于 O' 处且其固有时 τ'_o 与该处的 GPS 标准时 t'_o 对准，因为标准时同步，即 $\tau'_o = t'_o = t_s$ ，相当于接收机复制卫星在 t_s 时刻发射的信号。接收机于 τ_o 时刻接收到信号时与 O 处的标准时 t_o 的钟差 $\delta t_o = t_o - \tau_o$ ，是从 $O' \rightarrow O$ 的积累效果。所以积分沿接收机运动轨迹从 $t'_o \rightarrow t_o$ 等于 $t_s \rightarrow t_o$ 。

卫星发射的码元 (τ_s)

接收机复制的码元 (τ'_o)

接收机接收的码元 (τ_o)

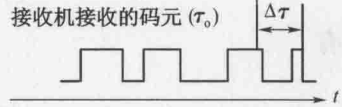


图 4.3.2 伪码测量的时间关系

由式(4.3.4)和式(4.3.5)，得到接收机相对于卫星钟的相对论钟差

$$\delta t = \delta t_s - \delta t_o = \frac{2e\sqrt{\mu_E a}}{c^2} \sin\psi + \left(W - w_o - \frac{v_o^2}{2} \right) \frac{\Delta t}{c^2} \quad (4.3.6)$$

式(4.3.6)右边第1项是卫星的椭圆运动产生的偏差，它是卫星在一个周期的积累的结果；后面3项与接收机的引力势和运动有关，它是光传播过程的积累。对于地面或近地空间低速运动接收机，可以看成静止于地面上，即

$$v_o^2 = |\boldsymbol{\Omega}_E \times \mathbf{r}_o|^2 = \Omega_E^2 R_E^2 \cos^2 \delta$$

式中： δ 为接收机所在处的地球纬度。根据等效引力势表达式(4.2.2)，可得

$$W - w_o - \frac{v_o^2}{2} = \frac{1}{2} \Omega_E^2 R_E^2 \sin^2 \delta$$

当接收机位于赤道海平面时($\delta=0$)上式为0。所以，式(4.3.6)的后一部分反映了接收机相对于赤道海平面时钟的钟差。

4.3.3 卫星到接收机距离的相对论意义

在伪距方程中涉及3种距离，分别记作

$$\begin{cases} \rho(t) = c(t_o - t_s) = c\Delta t \\ \rho(t_s) = |\mathbf{r}_s(t_s) - \mathbf{r}_o(t_o)| \\ \rho(t_o) = |\mathbf{r}_s(t_o) - \mathbf{r}_o(t_o)| \end{cases} \quad (4.3.7)$$

它们的严格定义是： $\rho(t)$ 即所谓的“真距离”，是指卫星发射信号和接收机接收信号的标准时间差与光速的乘积； $\rho(t_s)$ 是卫星发射信号时所在位置 $r_s(t_s)$ 到接收机接收信号时的位置 $r_o(t_o)$ 的距离，它是以坐标表示的光传播距离； $\rho(t_o)$ 是接收机接收到信号的同时，卫星所在处 $r_s(t_o)$ 与接收机的距离，它是相对论中在 t_o 时刻接收机与卫星的“坐标距离”。

根据相对论理论，以上的3种距离互不相同，下面分析它们的相互关系。

(1) “真距离”与光传播距离

根据引力场的时空间隔式(4.2.3)，光波的传播满足 $ds^2=0$ ，即

$$\left(1 - \frac{2(w - W_0)}{c^2}\right)c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2w}{c^2}\right)dl^2 = 0$$

故有

$$cdt = dl \left(1 - \frac{W}{c^2} + \frac{2\mu_E}{c^2 r}\right) \quad (4.3.8)$$

从此式明显看出，如果以坐标长度和坐标时间定义速度 dl/dt ，则光速并非常量，在引力场中不同 r 处具有不同的值。因为广义相对论的光速不变性不是指的坐标速度，而是用固有时和固有距离度量的固有速度。

注意到式(4.3.8)右边仅为空间的函数，沿光的传播路径从 $r_s \rightarrow r_o$ 积分，利用式(5.1.7)可得

$$c\Delta t = \int_{r_s}^{r_o} \left(1 - \frac{W}{c^2} + \frac{2\mu_E}{c^2 r}\right) dl = \rho(t_s) + c\delta t'' \quad (4.3.9)$$

其中

$$c\delta t'' = -\frac{W}{c^2}\rho(t_s) + \frac{2\mu_E}{c^2} \ln \frac{r_s + r_s \cdot n}{r_o + r_o \cdot n} \quad (4.3.10)$$

可见 $c\Delta t$ 并不等于欧氏几何距离 $\rho(t_s)$ ，将二者视为相等违背了光速不变的原则。因此，现行文献将该项称作真实距离的说法只是一种近似。式(4.3.10)右边第1项是由于采用标准时的结果，只是一种尺度的变换；第2项是时空弯曲的表现，表示光波在弯曲空间比平直空间的传播时间偏差，不可能归入到欧氏几何距离中，我们将这两项归入到伪距方程的钟差部分。

将式(4.3.6)和式(4.3.9)代入式(4.3.2)，则伪距方程应为

$$p(\tau) = \rho(t) + c\delta t = \rho(t_s) + c(\delta t + \delta t'') \quad (4.3.11)$$

钟差项 $\delta t' = \delta t + \delta t''$ 应为

$$c\delta t' = \frac{2e\sqrt{\mu_E a}}{c} \sin\psi + \frac{2\mu_E}{c^2} \ln \frac{r_s + r_s \cdot n}{r_o + r_o \cdot n} - \left(w_o + \frac{v_o^2}{2}\right) \frac{\Delta t}{c} \quad (4.3.12)$$

第1项是卫星的椭圆轨道产生的钟差;第2项是空间的弯曲效应;第3项和第4项分别是接收机的引力频移和二级多普勒频移。前3项是广义相对论效应,当引力消失时均为0,最后一项是狭义相对论的时间膨胀效应。如果取

$$r_s \sim a, r_o \sim R_E, \rho \sim H_s, v_o \sim \Omega_E R_E, \Delta t \sim 0.067$$

估算出上述4项的量级分别为 $\pm 10^{-1}$, $+10^{-3}$, -10^{-3} , -10^{-5} (m)。从数值上看,后面3项的影响可以忽略,这大概是现行伪距方程没有考虑这几项的原因。但从理论上讲,后面几项是存在的。

(2) 光传播距离与坐标距离

对于地心系的静止观测者,测量的固有长度是(见式(2.3.11))

$$dL = \sqrt{-ds^2} \Big|_{dt=0} = \left(1 + \frac{2w}{c^2}\right) dl(t_o)$$

当引力场消失时, $dL|_{w=0} = dl(t_o)$ 即为坐标长度。它与光传播距离的几何关系见图4.3.3, 即有

$$\rho(t_s) = \rho(t_o - \Delta t) = \rho(t_o) - \dot{\rho} \Delta t = \rho(t_o) \left(1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{c}\right) \quad (4.3.13)$$

其中, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = -\dot{\rho}$ 为卫星相对于接收机沿光传播方向的波矢向速度,而 $\dot{\rho}$ 为卫星与接收机距离的变化率,当 ρ 增加时为正,反之则为负。

在现行一些文献中没有明确指出因子 $(1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}/c)$, 可能是因为在多普勒计数测量中得到了反映,事实上该因子反映的正是1级多普勒频移。另外,在差分定位测量中该因子的作用被抵消掉了。差分定位(DGPS),是两个(或多个)接收系统在不同地点接收相同的卫星信号,由于两点的伪距方程中的某些项相同或基本相同,将这两个伪距方程相减后,这些项也就自然消失。

综合上面两节的分析,伪距方程可以用3种距离明确表示成

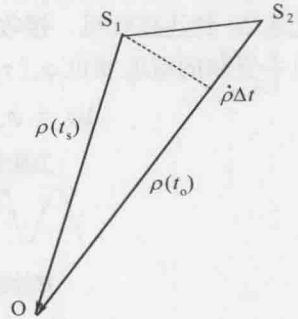


图4.3.3 卫星与接收机的两种几何距离的关系

$$\begin{aligned} p(\tau) &= c\Delta t + c\delta t \\ &= |\mathbf{r}_s(t_s) - \mathbf{r}_o(t_o)| + c\delta t' \\ &= |\mathbf{r}_s(t_o) - \mathbf{r}_o(t_o)| \left(1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{c}\right) + c\delta t' \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

其中, 钟差 δt 和 $\delta t'$ 分别由式(4.3.6)和式(4.3.12)确定。这是从纯粹相对论角度得出的精确结论。

4.3.4 测相伪距方程的引力效应

为了提高测量精度, 在实际卫星导航中一般采用测相伪距方程或载波相位测量方程。这是因为测码伪距方程中的伪距是以 P 码(精码)或 C/A 码(粗码)的码元宽度为基本测量单元, 而测相伪距方程中的伪距是以载波 L_1 和 L_2 的波长为测量单元, 测量精度为基本单元的 $10^{-1} \sim 10^{-2}$ 。从表 4.3.1 中可以看出, 载波相位测量可以达到更高的精度。

卫星发射的载波信号可以等效地用余弦波表示为

$$E(t, \mathbf{r}) = A(t)D(t) \cos[2\pi\varphi(t, \mathbf{r})]$$

式中: $A(t)$ 包括调制在载波上的测距码(P 码或 C/A 码); $D(t)$ 为调制在载波上的数据码(D 码); $\varphi(t, \mathbf{r})$ 为载波 L_1 或 L_2 的相位。GPS 中的频率如表 4.3.1 所列。

表 4.3.1 GPS 信号的频率和波长(码宽)

	P	C/A	L_1	L_2
频率/MHz	10.23	0.1×10.23	154×10.23	120×10.23
波长(码宽)	29.3m	293m	19.03cm	24.42cm

如图 4.3.4 所示, 设卫星钟面时刻 τ_s 发射的载波相位为 $\varphi_s(\tau_s)$, 经过时间延迟 Δt 到达接收机。接收机在钟面时刻 τ_o 接收到的相位为 $\varphi_o(\tau_o)$, 并与接收机中复制的载波相位 $\varphi_o(\tau_s) = \varphi_s(\tau_s)$ 进行比较, 二者的相位差是

$$\Delta\varphi = \varphi_o(\tau_o) - \varphi_o(\tau_s) = \varphi_o(\tau_o) - \varphi_s(\tau_s) \quad (4.3.15)$$

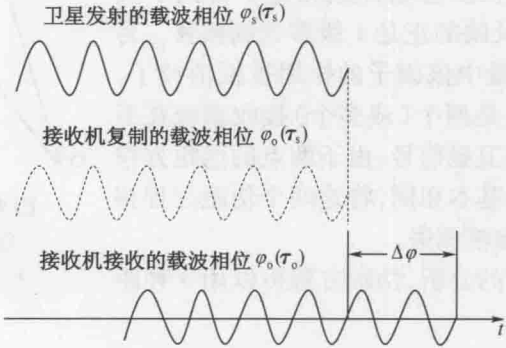


图 4.3.4 载波相位的测量

这是直接观测量, 因为相位的改变等价于光波的传播距离, 由此即可确定接收机的位置和其他参量。

这里实际上已经用到相对论的相位不变性, 即在卫星发播信号的时空点

$(t_s(\tau_s), \mathbf{r}_s(\tau_s))$), 光波的相位 $\varphi_s(\tau_s)$ 与接收机观测者测量该时空点的相位 $\phi_o(\tau_s)$ 相同, 与卫星相对于观测者的运动状态无关。相位不变性在经典物理中认为是理所当然的, 所以在一般情况下不做刻意说明; 但在引力场中, 相位不变性的表现形式不相同, 这将直接影响到相位的测量。

我们根据相位不变性, 分两步推导测相伪距方程。首先不考虑引力对光传播的影响。

设在时空点 (t_s, \mathbf{r}_s) 卫星发射光波的相位为 $\varphi_s(\tau_s(t_s, \mathbf{r}_s))$, 传播到时空点 (t, \mathbf{r}) 时应有

$$\begin{aligned}\varphi_s(\tau_s(t, \mathbf{r})) &= f_s \tau_s + \varphi_0 = f_s(t_s - \delta t_s) + \varphi_0 \\ &= f_s \left(t - \delta t_s - \frac{1}{c} |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_s(t_s)| \right) + \varphi_0 \\ &= f_s(t - \delta t_s) - \mathbf{k}_s \cdot (\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_s(t_s)) + \varphi_0 \quad (4.3.16)\end{aligned}$$

第1步是在卫星参考系中的相位, 第2步用到卫星钟的钟差 $\delta t_s = t_s - \tau_s$, 第3步利用了光传播的欧氏几何距离 $c(t - t_s) = |\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_s(t_s)|$, 第4步用到频率与波矢的关系。

当卫星发射的相位传播到接收机 (t_o, \mathbf{r}_o) 时, 则应有

$$\begin{aligned}\varphi_s(\tau_s(t_o, \mathbf{r}_o)) &= f_s(\tau_o + \delta t_o - \delta t_s) - \mathbf{k}_s \cdot (\mathbf{r}_o(t_o) - \mathbf{r}_s(t_s)) + \varphi_0 \\ &= \phi_o(\tau_o) - f_s \delta t - \mathbf{k}_s \cdot (\mathbf{r}_o(t_o) - \mathbf{r}_s(t_s)), \quad (4.3.17)\end{aligned}$$

式中: $\delta t_o = t_o - \tau_o$ 为接收机的钟差; $\delta t = \delta t_s - \delta t_o$ 为接收机相对于卫星的钟差; $\phi_o(\tau_o) = f_s \tau_o + \varphi_0$ 为接收机接收到的相位。

利用式(4.3.15), 式(4.3.17)即为

$$\lambda_s \Delta \varphi = |\mathbf{r}_o(t_o) - \mathbf{r}_s(t_s)| + c \delta t \quad (4.3.18)$$

这与现行的测相伪距方程相同。

下面证明, 当考虑引力时应将上式的 δt 替换为由式(4.3.12)定义的 $\delta t'$ 。

在引力场中, 相位的波动方程为式(2.1.47), 即

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\nu} = 0 \quad (4.3.19)$$

将地球引力场度规的逆变分量

$$g^{00} = \left(1 - \frac{2(w - W)}{c^2} \right)^{-1}, \quad g^{ii} = - \left(1 + \frac{2w}{c^2} \right)^{-1}, \quad (i = 1, 2, 3)$$

代入式(4.3.19), 得到

$$|\nabla \varphi|^2 = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \left(\frac{1 + 2w/c^2}{1 - 2(w - W)/c^2} \right) \quad (4.3.20)$$

在引力场的一个无穷小邻域内,光波的相位仍满足式(1.4.6),故有

$$k \equiv \frac{1}{\lambda} \approx \frac{f}{c} \left(1 - \frac{W - 2w}{c^2} \right) \quad (4.3.21)$$

它表明光波的(坐标)相速度 $v_p = f\lambda \neq c$, 且与引力场中的位置(r)有关。

所以在考虑引力作用时,式(4.3.17)应修正为

$$\varphi_s(\tau_s) = \phi_o(\tau_o) - f_s \delta t - \frac{f_s}{c} \int_{r_o}^{r_s} \left(1 - \frac{W}{c^2} + \frac{2\mu_E}{c^2 r} \right) dl$$

于是得到

$$\begin{aligned} \lambda_s \Delta \varphi &= \left(1 - \frac{W}{c^2} \right) \rho(t_s) + \frac{2\mu_E}{c^2} \ln \frac{r_s + r_o - \rho(t_s)}{r_s + r_o + \rho(t_s)} + c \delta t \\ &= \rho(t_s) + c \delta t'' + c \delta t \end{aligned}$$

令 $\delta t'' + \delta t = \delta t'$, 得到

$$\lambda_s \Delta \varphi = \rho(t_s) + c \delta t' = \rho(t_o) \left(1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{c} \right) + c \delta t' \quad (4.3.22)$$

第2步用到式(4.3.13)。这就是 GPS 测相伪距方程或载波相位测量方程的精确表示,方程左边为直接测量值,右边包含了卫星与接收机距离 ρ 及其时间导数 $\dot{\rho} = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$, 它们是卫星与接收机位置的函数,由此即可完成对接收机的定位。

由于 $\Delta \varphi$ 实际上就是伪距 $c(\tau_o - \tau_s)$ 对应的相位差(包含整波数),所以式(4.3.14)和式(4.3.22)两个伪距方程的左边都是卫星与接收机的伪距:

$$\rho(\Delta \tau) = c \Delta \tau = \lambda_s \Delta \varphi$$

测码伪距方程是通过测量发射与接收码元的时间延迟 $\Delta \tau$ 来计算伪距的,测相伪距方程中的伪距则由发射与接收的载波相位差 $\Delta \varphi$ (包括整波数)来确定。因此两方程是完全一致的。事实上,从理论上讲,无论测量方法有何不同,只要测量原理一致,则基本测量方程本身不应该存在任何差异。

4.3.5 多普勒测量方程的引力效应

我们采用类似于 4.2.4 节的方法,简单导出引力场中的多普勒频移公式。如图 4.3.5 所示,假想两个“中间观测者” P_s 和 P_o , 分别位于卫星发射信号时所在处和接收机接收信号时的位置,且都相对于 GCRS 静止。因而信号的实际传播过程等效于从卫星(S) $\rightarrow P_s \rightarrow P_o \rightarrow$ 接收机(O),我们分别讨论这几个过程的相对论频移。

(1) 设卫星发射信号时的位置为 r_s , 卫星相对于 GCRS 也就是相对于观测者 P_s 的速度为 v_s , 在卫星所在处的局域惯性系可以直接应用狭义相对论的多普

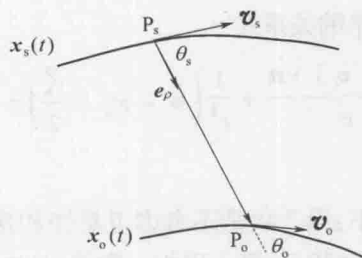


图 4.3.5 光传播的引力和多普勒频移

勒频移公式,所以 P_s 接收到的频率 f'_s 与卫星的固有频率 f_s 的关系为

$$\frac{f'_s}{f_s} = \frac{\sqrt{1 - V_s^2/c^2}}{1 - \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n}/c}$$

(2) 同理,设接收机接收信号时的位置和相对于观测者 P_o 的速度分别为 r_o 和 v_o ,当光波从 P_o 传播到接收机时也有多普勒频移,接收机接收到的频率 f_o 与 P_o 发射的频率 f'_o 的关系是

$$\frac{f_o}{f'_o} = \frac{1 - \mathbf{v}_o \cdot \mathbf{n}/c}{\sqrt{1 - v_o^2/c^2}}$$

(3) 因为 P_s 和 P_o 都静止于 GCRS 中,引力势分别为 $w_s = w(r_s)$ 和 $w_o = w(r_o)$,当光波从 P_s 到 P_o 时仅存在引力频移, f'_s 和 f'_o 的关系为

$$\frac{f'_o}{f'_s} = \frac{(d\tau_o)_s}{(d\tau_o)_o} = \left(\frac{1 - 2(w_s - W)/c^2}{1 - 2(w_o - W)/c^2} \right)^{1/2}$$

将上面 3 式相乘也就得到

$$\begin{aligned} \frac{f_s}{f_o} &= \frac{1 - \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n}/c}{1 - \mathbf{v}_o \cdot \mathbf{n}/c} \left(\frac{1 - v_o^2/c^2}{1 - V_s^2/c^2} \cdot \frac{1 - 2(w_o - W)/c^2}{1 - 2(w_s - W)/c^2} \right)^{1/2} \\ &\approx \frac{1 - \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n}/c}{1 - \mathbf{v}_o \cdot \mathbf{n}/c} \left(1 + \frac{V_s^2 - v_o^2}{2c^2} - \frac{w_o - w_s}{c^2} \right) \end{aligned} \quad (4.3.23)$$

这与在 2.5.5 节求出的式(2.5.32)相一致。

现在考虑光波的实际传播过程。

根据式(4.2.8),卫星理想的固有频率 f_s 与标准频率 f_G 的关系为

$$\frac{f_G}{f_s} = \frac{dt_s}{d\tau_G} = 1 + \frac{1}{c^2} \left(W - \frac{3\mu_E}{2a} \right)$$

利用卫星速度和矢径的表达式

$$\frac{V_s^2}{2} = w_s - \frac{\mu_E}{2a}, \quad r_s = a(1 - e \cos \psi)$$

得到标准频率与接收频率的关系式

$$\frac{f_G}{f_o} = 1 - \frac{(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_o) \cdot \mathbf{n}}{c} + \frac{1}{c^2} \left(W - w_o - \frac{v_o^2}{2} \right) - \frac{2\mu_E}{c^2 a} \left(\frac{e \cos \psi}{1 - e \cos \psi} \right) \quad (4.3.24)$$

右边各项的物理意义如下:第2项是不考虑卫星钟和接收机时钟钟差情况下的1级多普勒频移,其量级为 10^{-5} ;第3项为一常值,是由于引入标准时产生的;第4、第5项为接收机的引力势和运动效应产生的频移;第6项是卫星的椭圆运动产生的频移。

由于后面4项为小量,其量级分别为 10^{-10} 、 10^{-10} 、 10^{-12} 、 10^{-12} ,将它们合并记作

$$\delta \dot{t}_f = \frac{1}{c^2} \left(W - w_o - \frac{v_o^2}{2} \right) - \frac{2\mu_E}{c^2 a} \left(\frac{e \cos \psi}{1 - e \cos \psi} \right) \quad (4.3.25)$$

它对应于伪距测量方程的钟差式(4.3.6)。但式(4.3.25)是指卫星钟的频移,即单位时间内产生的误差,而式(4.3.6)中卫星钟的钟差是卫星在一个周期中的积累。

于是式(4.3.24)成为

$$\lambda_G(f_G - f_o) = \dot{\rho} + c \delta \dot{t}_f \quad (4.3.26)$$

对时间积分,根据多普勒计数的定义式(1.4.13),得到

$$\lambda_G C_d = \lambda_G \int_t^{t+\Delta t} (f_G - f_o) dt = \Delta \rho + c \Delta(\delta t_f) \quad (4.3.27)$$

式中, C_d 为多普勒计数测量值,是直接观测量; $\Delta \rho$ 为 Δt 时间内接收机到卫星距离变化量(距离增大时为正); $\Delta(\delta t_f)$ 为 Δt 时间内的钟差。由此即可确定 $\Delta \rho$ 或 $\dot{\rho} = (\mathbf{v}_o - \mathbf{v}_s) \cdot \mathbf{n}$ 。因为卫星速度 \mathbf{v}_s 是已知量,将接收机接收到的3颗卫星的频率 $f_o^a (a=1,2,3)$ 联立求解,即可算出接收机的速度 \mathbf{v}_o ——这就是利用多普勒频移测量载体速度的原理。

有意思的是,利用差分定位法可以有效地消除相对论效应带来的测量误差。设地面主测站(R)的速度 \mathbf{v}_R 为已知量,接收到卫星(S)的频率为 f_R ,满足式(4.3.26),即

$$\lambda_G(f_G - f_R) = \dot{\rho}_R + c \delta \dot{t}_R$$

同理,设待测导弹(M)的速度和接收同一卫星的频率分别为 \mathbf{v}_M 和 f_M ,则有

$$\lambda_G(f_G - f_M) = \dot{\rho}_M + c \delta \dot{t}_M$$

由式(4.3.25)可知两钟差的关系为

$$\delta \dot{t}_M - \delta \dot{t}_R = \frac{1}{c^2} \left(w_R - w_M + \frac{v_R^2 - v_M^2}{2} \right)$$

导弹将接收频率转发到主测站,在主测站接收到的转发频率 f_{RM} 与导弹发射频率 f_M 的关系满足式(4.3.26),即

$$\lambda_G(f_M - f_{RM}) = \dot{\rho}_{RM} + \frac{1}{c} \left(w_M - w_R + \frac{v_M^2 - v_R^2}{2} \right)$$

根据上面4式得到

$$\lambda_G(f_R - f_{RM}) = \dot{\rho}_M - \dot{\rho}_R + \dot{\rho}_{RM} \quad (4.3.28)$$

左边是主测站接收卫星频率与导弹转发频率之差,为直接观测量;由于卫星速度 v_s 和主测站速度 v_R 均为已知量,从而可以确定导弹速度 v_M 。

参 考 文 献

- [1] 李济生. 人造卫星精密轨道确定. 北京: 解放军出版社, 1995.
- [2] 谭述森. 卫星导航定位工程. 北京: 国防工业出版社, 2010.
- [3] 王惠南. GPS 导航原理与应用. 北京: 科学出版社, 2003.
- [4] 魏子卿. 2000 中国大地坐标系. 大地测量与地球动力学, 2008, 28(6).
- [5] Allan D W. GPS, atomic clocks and relativity. IEEE-IM, 1994, 13(2).
- [6] Bahder T B. Relativistic effects in satellite navigation and time transfer. Phys Rev(D), 2003, 68.
- [7] Bisnath S B, Langley R B. High-precision, kinetic positioning with a single GPS receiver. Navigation, 2002, 49(3).
- [8] Jorgensen P. Special relativity and inter-satellite tracking. Navigation, 1988, 35(4).
- [9] Levine J. Time and frequency distribution using satellites. Reports on Progress in Physics, 2002, 65(8).
- [10] Marmet P, Couture C. Relativistic deflection of light near the sun using radio signals and visible light. Physics Essays, 1999, 12(1).
- [11] Marmet P. GPS and the illusion of constant light speed. Galilean Electrodynamics, 2003, 14(2).
- [12] Martin C F, Torrence M H, Misner C W. Relativistic effects on an earth-orbiting satellite in the barycenter coordinate system. Journal of Geophysical Research, 1985, 90(11).
- [13] Spallicci A. Relativistic effects for low earth orbit satellites using GPS. Proceedings of the 6th European Frequency and Time Forum, 1992.

第5章 X射线脉冲星导航的相对论模型

由于GPS在军事上获得了巨大成功并且在民用上得到了丰富的效益,美国高级研究计划局(ARPA)和国防高级研究计划局(DARPA)在2004年提出了一个宏大的空间计划——基于X射线源的自主导航系统(X-ray pulsar-based autonomous navigation, XNAV)。美国军方认为高科技空间技术存在潜在的威胁,表现为核爆炸、定向能武器以及空间拦截技术,将降低和削弱GPS、导弹发射、卫星探测、卫星通信以及气象卫星的功能和使用效果。作为一种备份和技术支持,X射线脉冲星自主导航系统将有效地改善和加强GPS及其他太空系统的技术状态。毫无疑问,XNAV的研制成功并投入使用后,将极大地改善美国及其盟国的太空军事力量,使其更加安全可靠。由于XNAV还没有投入运行,一些工程技术问题仍然在进一步的探索之中。我们在综合整理国内外相关资料的基础上,介绍相对论在XNAV中的应用。

5.1 X射线脉冲星导航概述

卫星导航技术虽然先进,但是也存在不可避免的缺陷,这是由它的基本原理决定的,是先天具有的。卫星导航是以人造地球卫星作为定位的基准,它们的位置准确性直接影响到整个导航系统的精度,因此必须具有相当精确的位置参数。事实上,导航卫星的位置主要是根据它的运动惯性,即稳定的运动轨迹来判定的。但是不可避免地,各种因素(例如月亮和太阳的引潮力)的扰动必然导致卫星的位置偏差,我们不得不从地球上的固定点反过来对卫星定位,这也是地面监测系统的重要任务。地面监测站将收集到的数据进行综合处理,确定卫星位置的改正值,并注入卫星星历通知用户。这种定位过程实际上仍然以地球为基准,可表示为

地面监测站 → 空间卫星 → 接收机

这对于地面或近地空间接收机的定位或导航影响不大,但对于太空航行、高轨卫星等深度空间的测量来说,其结构显然不太合理。因此,GPS运行体系中有一个“精度稀释”问题,它是用来衡量GPS数据质量的尺度。那么,是否可以通过其他的参考物为卫星或航天器自动地定位呢?这是一个很自然的想法,我们当然期望选择恒星为定位的基准,将上述定位过程改成

如果这样,将有效地减小卫星导航数据的先天性结构误差,当然,也必将带来一系列的空间科技革命。

5.1.1 基于天体的天文自主导航

首先谈谈航天器的天文自主导航,它是以天然星体作为导航星座的一种成熟的导航技术。

北斗星座可能是最原始的天体导航星座,人们最早利用它来判断方向。现代天文导航技术的基本思想即源于此,它具有简单、方便和自主性等优点,缺点是导航精度不高。天文导航的基本观测量是星光角距,是指航天器与两个天体连线的夹角。依靠多个星光角来确定航天器的位置叫做纯几何方法,如果再加上航天器状态方程并做滤波处理,则可以大幅度提高导航精度。下面简单介绍一种广泛使用的几何定位法。

如图 5.1.1 所示,设航天器 A 相对于两个较近的天体 S 和 E(如太阳和地球)的矢径分别为 \mathbf{r} 和 \mathbf{x} ,方向(单位)矢量为

$$\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{r} = (e_r^1, e_r^2, e_r^3), \quad \mathbf{e}_x = \frac{\mathbf{x}}{x} = (e_x^1, e_x^2, e_x^3) \quad (5.1.1)$$

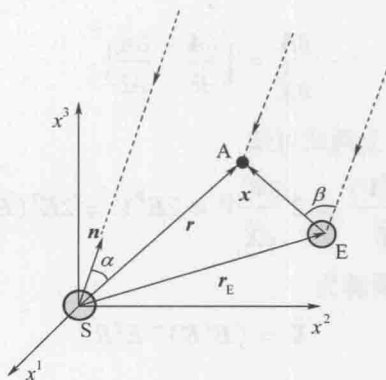


图 5.1.1 天文导航的几何方法

再设 3 颗遥远恒星相对于航天器的方向矢量为 \mathbf{n}^a , $a=1,2,3$ 为恒星代号。航天器测量 3 颗星的方向矢量与 \mathbf{e}_r 和 \mathbf{e}_x 的夹角分别是

$$\begin{cases} \mathbf{n}^a \cdot \mathbf{e}_r = \cos \alpha_a \\ \mathbf{n}^a \cdot \mathbf{e}_x = \cos \beta_a \end{cases} \quad (5.1.2)$$

因为 3 个方位角可以唯一确定一个矢量的方向,式(5.1.2)也就唯一确定了两个方向矢量 \mathbf{e}_r 、 \mathbf{e}_x ,二者延长线的交点就是航天器的位置——这就是天文导航的基本思想。

如果天体 E 相对于 S 具有确定的位置矢量 \mathbf{r}_E , 这可以通过天体的星历或精确轨道参数获得, 则有

$$\mathbf{r} - \mathbf{x} = r\mathbf{e}_r - x\mathbf{e}_x = \mathbf{r}_E$$

这 3 个分量方程构成天文导航的观测方程, 其矩阵形式为

$$\mathbf{E}\mathbf{X} = \mathbf{R} \quad (5.1.3)$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} e_r^1 & -e_x^1 \\ e_r^2 & -e_x^2 \\ e_r^3 & -e_x^3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} r \\ x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_E^1 \\ r_E^2 \\ r_E^3 \end{bmatrix} \quad (5.1.4)$$

由于测量矩阵 \mathbf{E} 不可避免地存在误差, 可采用优化方法 (如最小二乘法) 求出航天器位置的最优估计值 $\hat{\mathbf{X}}$ 。

设 3×1 阶误差矩阵为

$$\mathbf{V} = \mathbf{E}\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{R} = [v_1 \quad v_2 \quad v_3]^T$$

对于等精度测量, 最小二乘法要求

$$\mathbf{V}^T \mathbf{V} = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = \min$$

定义矩阵的导数为

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \hat{\mathbf{X}}} = \left[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \hat{r}} \quad \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \hat{x}} \right]^T$$

式中, \mathbf{A} 为任意矩阵。由上两式可知

$$0 = \frac{\partial (\mathbf{V}^T \mathbf{V})}{\partial \hat{\mathbf{X}}} = 2 \frac{\partial \mathbf{V}^T}{\partial \hat{\mathbf{X}}} \mathbf{V} = 2\mathbf{E}^T \mathbf{V} = 2\mathbf{E}^T (\mathbf{E}\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{R})$$

故等精度测量的最小二乘解为

$$\hat{\mathbf{X}} = (\mathbf{E}^T \mathbf{E})^{-1} \mathbf{E}^T \mathbf{R} \quad (5.1.5)$$

由此得到观测方程的解

$$\begin{bmatrix} \hat{r} \\ \hat{x} \end{bmatrix} = \frac{r_E}{\sin^2 \theta} \begin{bmatrix} 1 & -\cos \theta \\ -\cos \theta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_r \\ -\cos \theta_x \end{bmatrix} \quad (5.1.6)$$

式中的角度分别满足

$$\begin{cases} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_x = \cos \theta, (\theta = \theta_x - \theta_r) \\ \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{r}_E = r_E \cos \theta_r \\ \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{r}_E = r_E \cos \theta_x \end{cases}$$

最后得到航天器位置的最优估计值:

$$\hat{\mathbf{r}} = \hat{r}\mathbf{e}_r = r_E + \hat{x}\mathbf{e}_x \quad (5.1.7)$$

我们看到,天文导航的几何方法确实很经济实用。但是纯粹的几何方法未免过于理想化,难免产生模型误差。另外,天文导航的主要测量工具是星敏感器,角度测量精度约为 $3''(1\sigma)$,这就导致天文导航的测量精度较差,一般约在千米量级。在要求精度较高的场合,常常将天文导航方法与其他手段(如惯性导航等)进行组合,利用信息融合技术可以达到较好的效果。

5.1.2 基于 X 射线脉冲星的自主导航

5.1.1 节的分析表明,天文导航实际上利用了遥远恒星的方位作为导航信息,但不涉及恒星的距离,这是因为一般恒星并不提供可以测量距离的信息。如果像卫星导航中的卫星一样,恒星能够发射周期性光信号,则可以采用和卫星导航一样的方法来进行导航,原则上可以达到与卫星导航相当的导航精度。通过卫星导航实践,作为导航星座的天体必须具备以下的条件:

(1) 具有稳定的、已知的空间位置,事实上一般恒星都满足这个条件。

(2) 能够发射我们易于接收的电磁波信号。因为 X 射线的能量较高,波长范围为 $0.05 \sim 10\text{nm}$,用光子能量表示则是 $0.5 \sim 100\text{keV}$,具有很强的穿透力(但不能穿透大气层),并且 X 射线的探测技术较为成熟,所以星体应该是 X 射线源。已经发现的这类星体有 1000 多颗。

(3) 因为我们必须根据接收的信号来确定接收机到星体的距离,这就要求星体能够提供发射信号的时间信息。X 射线脉冲星发射具有严格周期的脉冲信号,我们可以通过接收脉冲星的脉冲信号到达时间计算光波的传播距离,也就相当于利用了脉冲星的距离信息。

但是,XNAV 与卫星导航原理不同的是,我们并不需要知道观测者与脉冲星的绝对距离,事实上,离我们最近的 X 射线脉冲星也有 100 多光年(约 50pc),根本不可能准确测量。XNAV 实际上是以太阳系质心(SSB)为基准,计算 X 射线脉冲传播到太阳系质心和观测者的时间差值,来确定观测者在太阳系质心系(BCRS)中的位置。设脉冲星发射光波的同一波阵面到达 SSB 和航天器的时间,即光子到达时间(Time of Arrive, TOA)分别为 t_B 和 t_A ,将图 5.1.1 中的 S 改成 SSB,不难看出这个时间差对应的距离为

$$c(t_B - t_A) = r \cos \alpha = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} \quad (5.1.8)$$

如果测量 3 颗脉冲星($a=1,2,3$),就可以得到 3 个方程

$$c(t_B^a - t_A^a) = \mathbf{n}^a \cdot \mathbf{r} \quad (a=1,2,3) \quad (5.1.9)$$

由此即可求得航天器的 3 维位置矢量——这就是 XNAV 的基本思想。以后将详细讨论这个方程。

将脉冲星应用于空间导航经历了长时间的理论探索。自从英国天文学家

Hewis Hewish 和他的研究生 Bell 在 1967 年发现第一颗脉冲星以来,一些天文学家和物理学家相继提出了许多有意义的设想,大致有以下的一些重要研究:

1971 年,Reichley、Downs 和 Morris 描述了脉冲星用于计时的前景;

1974 年,Downs 提出射电脉冲星为航天器自主导航的思想;

1980 年,Downs 和 Reichley 研究了脉冲星的 X 射线传播时间的测量技术;

1981 年,Chester 和 Butman 提出 X 射线脉冲星可以为宇宙飞船导航;

1993 年,Wood 进一步提出应用脉冲星可以确定航天器的姿态;

2004 年 8 月,美国航空航天局(NASA)和海军天文台等多家单位着手拟定和启动 X 射线脉冲星自主导航(XNAV)的研究计划,并纳入国防长期发展战略规划纲要。

XNAV 是一项超前的空间战略项目,它有如下的明显优点:

(1) 美国的 GPS、俄罗斯 GLONASS、欧洲的 Galileo 计划和我国的 COMPASS 定位系统等卫星导航工程是以人造地球卫星作为定位的基准,卫星定位的准确性直接影响到整个系统的精确度,并且容易受到攻击或干扰;XNAV 就是以遥远的 X 射线脉冲星作为定位的基准,而 X 射线脉冲星是宇宙空间“天钟”,它不会受到人为的攻击和干扰,因此 XNAV 具有非常好的安全和隐蔽性能。

(2) COMPASS 等卫星导航系统的卫星位置依赖于它们的运动惯性和地面监测站的测控,这种结构本身决定了卫星导航系统应用的局限性,只能对近地或低轨卫星定位导航,不可能应用于深空导航;XNAV 是以太阳系质心系(BCRS)为参考系,可以支持中、高轨人造地球卫星,包括卫星导航系统的卫星,还可以为航天飞机、航天站等太空技术装备提供自主导航的能力,为其确定时间、位置和姿态。所以 XNAV 能够为我国高速发展的航天事业提供强有力的技术支持。

(3) 卫星导航系统是一个系统工程,由空间卫星系统、地面监测系统和接收系统三部分组成。XNAV 的硬件部分实际上是一种接收 X 射线探测装置,由于 X 射线能段可以使用相对较小的探测装置来探测脉冲信号,便于在航天器上搭载应用,利用对脉冲星的 X 射线观测实现航天器的自主导航是国际上的主要研究方向。

(4) 另外,X 射线脉冲星还可以作为一种“时钟”标准,精确的时间系统优于或等价于现在使用的原子钟,具有相当高的准确性和可靠性。

XNAV 在军事上具有极大的应用价值。自从美国的 GPS 卫星导航定位系统研制成功后,经过海湾战争、科索沃战争和伊拉克战争等多次军事行动的实际应用,卫星导航定位系统已经成为提高军队战斗力的强有力的保障,它的巨大优越性引起各国军事家和科学家的高度重视。而 XNAV 可以为卫星导航系统的卫星自主导航,原则上不需要地面测控系统的支持,这将减少卫星导航系统的风险。随着军事高科技的迅速发展,未来我国的航天事业发展迅速,逐渐增多的侦

察、气象、导航、通信中高轨卫星,载人和不载人宇宙飞船以及未来的航天站等大量航天器都需要太空导航的支持,特别是我军在太空领域的军事装备(例如空间站)更需要先进的天体导航和定位系统。

总之,XNAV 确实是一个非常超前的空间战略计划,虽然它不能取代卫星导航系统,但作为一种备份和技术支持,对航天和国家安全具有重要的战略意义。并且,一旦美国或欧洲的 XNAV 研制成功并投入使用,将极大地改善美国及其盟国的太空军事力量,使其更加安全可靠,对我们的太空装备产生威胁。在当今激烈的国际竞争环境中,加强基础性、战略性和前瞻性的研究,争取太空军事领域的领先地位,是我军装备建设的重大需求。

5.1.3 X 射线脉冲星的观测特性

天文观测和天体物理研究表明,当恒星演化到晚期,由于内部核原料大部分已经消耗,不能产生正常的热压力来支持引力塌缩,导致星体的质量密度相当高,这种星体称作致密星,包括白矮星、中子星和黑洞 3 类。其中,黑洞还处于理论预测阶段,已经发现的质量密度最大的星体是中子星(每立方厘米的质量达到 1 亿 t),强大的引力将原子中的电子压缩到原子核中,与质子反应而生成中子,故名之。

早在 20 世纪 30 年代,人们就预言中子星的存在,直到 1967 年才发现第一颗脉冲星,这是 20 世纪天文学上的重大事件。脉冲星是一种高速旋转的中子星,质量和半径分别为 $0.2M_s \sim 2.5M_s$ 和 $10^{-5}R_s$ (M_s 、 R_s 分别代表太阳质量和半径),因而质量密度约为太阳的 10^{15} 倍。对于绝大多数脉冲星,半径范围在 $10 \sim 20\text{km}$,星体内部的密度是 $10^{14} \sim 10^{18}\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ 。到现在为止,已经发现 2000 多颗脉冲星,能够发射强 X 射线的脉冲星共有 27 颗,大多数位于银道坐标系的银道面附近,如图 5.1.2 所示。

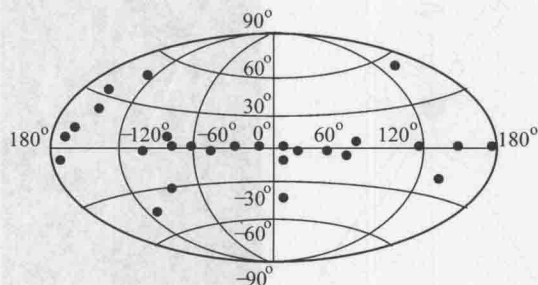


图 5.1.2 X 射线脉冲星在银道坐标系中的分布

X 射线脉冲星除了具有致密星体的普遍性质外,还有一些很有意义的观测特征。

1. 稳定的高速旋转

X 射线脉冲星体本身高速稳定地旋转,绕其自转轴的转动周期为 $1.5\text{ms} \sim 8\text{s}$ 。例如,Crab 脉冲星(J0534 + 2200)的自转周期是 33.08ms ,每秒转 30 多转,而地球自转一转需要 86400s 。这个速度确实相当惊人,正因为如此,脉冲星的体积较小而密度相当大。设脉冲星质量和半径分别是 M 、 R ,它的角速度 $\omega \approx \sqrt{GM/R^3}$,故脉冲星的自转周期与密度的关系为

$$P = \frac{2\pi}{\omega} \approx \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$$

对于周期为 1ms 的脉冲星,密度约为 $10^{17}\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ 。另外,由于脉冲星不断辐射能量,导致转动速度缓慢减小,因而脉冲周期将会缓慢增大。就绝大多数脉冲星来说,周期变化率 $\frac{\Delta P}{P}$ 为 $10^{-13} \sim 10^{-20}\text{s/s}$,在一年内的时间误差小于 10^{-6}s ,具有相当高的稳定性。

2. 奇特的“灯塔”效应

脉冲星周围有很强的磁场,绝大多数脉冲星的表面磁场为 $10^{12} \sim 10^{13}\text{Gs}$ 。由于电子在磁场中的运动产生的同步辐射、曲率辐射以及电子与光子作用的逆康普顿散射等机制导致了 X 射线的辐射,成为宇宙中的一种 X 射线源。但是,脉冲星的辐射并不是像太阳一样向四周均匀发射,而是沿磁极方向在一个较窄的锥体(锥角小于 10°)内发射。脉冲星的自转轴与磁极不是同一方向,这一点类似于地球。脉冲星的转动带着辐射光束在宇宙中扫过一个巨大的锥形,当光束扫过观测者时,就可以接收到脉冲信号。人们将脉冲星比喻为宇宙中的一种天然“灯塔”,是非常恰当的,如图 5.1.3 所示。

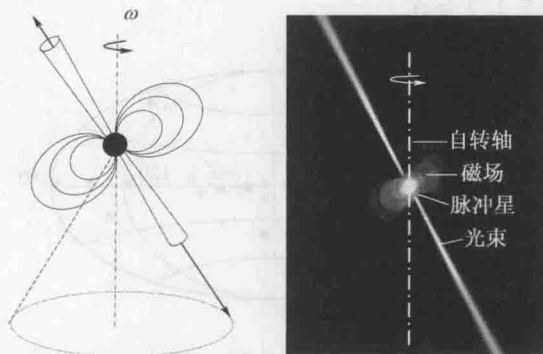


图 5.1.3 脉冲星的“灯塔”效应

3. 精确的脉冲轮廓

由于脉冲星的高速旋转和“灯塔”效应,导致宇宙中的观测者接收到的 X 光

子时间谱呈现周期性的脉冲状,脉冲的周期即为脉冲星转动周期,并且具有相当高的稳定性,这个特性导致它被形容为宇宙中的“天钟”,其精确度甚至优于或等价于作为定时标准的高精度原子钟。

脉冲星的脉冲轮廓集中反映了脉冲星的时间特性,它是地球观测者经过长时间探测得到的。但是,脉冲星发射的 X 光子到达地球的时间与地球在 BCRS 中的位置有关,因此必须将接收时间转换到固定点 SSB 上。以 SSB 为原点建立黄道坐标系,设脉冲星的黄经和黄纬坐标是 (β, λ) , T_E 和 a_E 为地球公转轨道周期和半长轴, $A_E = a_E/c = 500\text{s}$ 是光波从地球到 SSB 的传播时间,则脉冲星发射的 X 光子到达地球和 SSB(记作 B)的时间差为

$$\Delta t = t_E - t_B = A_E \cos \lambda \cos \left(\frac{2\pi}{T_E} t - \beta \right)$$

上式是将地球公转当成圆周运动,且没有考虑周年视差和相对论效应等时间修正量,在以后的讨论中将详细说明。相对于光子到达 SSB 的时间,地球观测者接收光子时间的最大延迟和超前均为 $A_E \cos \lambda$, 发生在地球距离脉冲星最远处和最近处。图 5.1.4 中给出了 $\beta = 0$ 方向的时延变化曲线。

在实际测量中,将 t_E 时刻接收到的光子数 $x(t_E)$ 按上式转换成 SSB 接收时间 t_B 的光子数,从而得到光子时间序列 $\{x(t_B)\}$, 再做周期叠加就得到 1 个周期内的脉冲轮廓,如图 5.1.5 所示。由此得到轮廓相当于 SSB 处的探测器接收到的光子时间谱,也称作脉冲星的标准轮廓。因为它可作为太阳系其他位置观测者测量的脉冲轮廓的标准,两个轮廓的相位差反映了 X 光子到达 SSB 和观测者的时间差,在后面将看到, XNAV 就是以此为基础进行时间测量的。

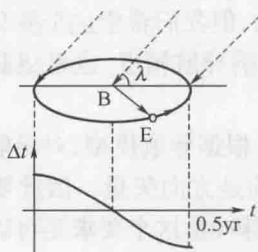


图 5.1.4 地球和 SSB 接收光子时间的关系($\beta = 0$)

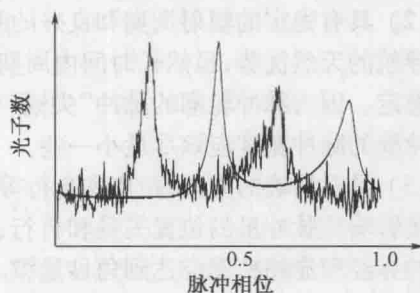


图 5.1.5 Crab 脉冲星的 X 射线标准轮廓
(光滑曲线是数据处理后的轮廓)

上述脉冲轮廓是某一参考时刻 t_r 的轮廓,初始相位是 $\varphi_B(t_r)$ 。从参考时刻到当前时刻一般要经历较长时间(例如几年),天体物理学家认为随着时间的演化,轮廓的形状不会改变但周期将发生微小变化。对参考时刻的轮廓做时间延拓,可以得到某一时刻 t_0 的脉冲轮廓,根据泰勒级数展开式,其相位是

$$\varphi_B(t_0) = \varphi_B(t_r) + \sum_{k=0,1,\dots} \frac{f_p^{(k)}(t_r)}{k!} (t_0 - t_r)^{k+1} \quad (5.1.10)$$

式中: $f_p^{(k)}(t)$ 为 t 时刻脉冲星的频率及其导数, 为已知量。以 t_0 为计时起点, 如果当前时间 t 与 t_0 相差不大, 则该时刻的相位是

$$\varphi_B(t) = \varphi_B(t_0) + \sum_{k=0,1,2} \frac{f_p^{(k)}(t_0)}{k!} (t - t_0)^{k+1} \quad (5.1.11)$$

设时间间隔 $t \sim t + P_B(t)$ 为 SSB 接收光波的 1 个周期, 即 $\varphi_B(t + P_B) - \varphi_B(t) = 1$, 由上式可知

$$P_B(t) = P_p(t_0) + \dot{P}_p(t - t_0) \quad (5.1.12)$$

如果将到达时间 t 与计时起点 t_0 的差值取得很小, 则式(5.1.12)右边第 2 项可以略去。这样就得到初始相位为 $\varphi_B(t_0)$ 、周期为 $P_B(t)$ 的当前脉冲轮廓, 由此即可推算出当前一段时间内光子到达 SSB 的时间, 也就是式(5.1.8)中的 t_B 。

5.1.4 X 射线脉冲星的导航参数

从导航的角度来看, 并不是所有的 X 射线脉冲星都能用来导航, 能够成为导航星座的 X 射线脉冲星应该具备以下 3 个条件:

(1) 具有较强的辐射强度和较高的信噪比。由于脉冲星距离我们非常遥远, 且绝大多数位于银道面附近, 辐射信号的信噪比较低, 航天器需要在短时间对接收到的 X 光子时间序列形成脉冲轮廓, 要求脉冲星的辐射强度越大越好, 遗憾的是除极少数脉冲星外的大多数脉冲星的辐射强度都很小, 只能尽量挑选那些辐射强度大、信噪比较高的脉冲星。

(2) 具有稳定的辐射周期和良好的脉冲轮廓。脉冲星精确而稳定的辐射周期是导航的天然优势, 虽然长时间内周期总是变化的, 但我们希望这个变化应该相对稳定。因为脉冲轮廓的脉冲“尖锐”程度直接影响导航精度, 也希望脉冲星标准轮廓的脉冲宽度应该尽量小一些。

(3) 具有精确的方向、距离和自行等状态参量。根据导航模型, 对导航精度的直接影响是脉冲星的位置矢量和自行, 影响最大的是方向矢量。因此要求脉冲星的赤经和赤纬精度应达到角秒量级。对大多数脉冲星这个要求是可以达到的。另外, 从导航的角度要求多颗脉冲星的空间分布应当尽量均匀。

根据目前的天文观测现状, 适合于导航的 X 射线脉冲星大约有 10 颗, 具体参数如表 5.1.1 所列。

表中的赤经(Right Ascension, RA)和赤纬(Declination, DEC)是以 SSB 为原点的赤道坐标系(见 3.2.1 节)的经纬度, 赤经和赤纬的度量单位分别是时分秒和度分秒, 前者是以春分点为起点由西向东将经度划分为 24h, 与通常角度单位的关系为

$$1\text{h} = 360^\circ/24 = 15^\circ, \quad 1\text{min} = 15', \quad 1\text{s} = 15''$$

表 5.1.1 一些 X 射线脉冲星参数

脉冲星 PSR	X 光子流量/ $\text{ph} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$	脉冲周期 P/ms	赤经 α	赤纬 δ	赤经自行 $\mu_\alpha/\text{mas} \cdot \text{a}^{-1}$	赤纬自行 $\mu_\delta/\text{mas} \cdot \text{a}^{-1}$
J0534 + 2200	1.54×10^0	33.08	05h34min31.97s	22°00'52"	14.7	2.0
J1513 - 5908	1.62×10^{-2}	150.66	15h13min55.62s	-59°08'09"	—	—
J1846 - 0258	6.03×10^{-3}	325.68	18h46min24.94s	-02°58'30"	—	—
J0540 - 6919	5.15×10^{-3}	50.40	05h40min11.20s	-69°19'54"	—	—
J0835 - 4510	1.59×10^{-3}	89.33	08h35min20.61s	-45°10'35"	-49.68	29.9
J1824 - 2452	1.93×10^{-4}	3.05	18h24min32.01s	-24°52'11"	-1.36	21.3
J1959 - 2048	8.31×10^{-5}	1.60	19h59min36.77s	20°48'15"	—	—
J0437 - 4715	6.66×10^{-5}	5.75	04h37min15.88s	-47°15'09"	121.48	-71.57
J0218 + 4232	6.65×10^{-5}	2.32	02h18min06.35s	42°32'17"	—	—
J1939 + 2134	4.99×10^{-5}	1.56	19h39min38.56s	21°34'59"	0.071	-0.414

赤经自行 (Proper Motion in Right Ascension, PMRA) 和赤纬自行 (Proper Motion in Declinator, PMDEC) 表示脉冲星沿经纬线方向的固有运动速度, mas (milliarcseconds) 表示毫角 (弧) 秒。脉冲星代号表示脉冲星赤经赤纬坐标, “J” 表示归算到历元 2000 年的值 (“B” 表示归算到历元 1950 年的值), 前 4 位数表示赤经的时和分, 后 4 位表示赤纬的度和分, 正 (负) 号表示北 (南) 纬。如 J0534 + 2200 表示脉冲星位于赤经 5h34min (83°30′) 和北赤纬 22°00′。

赤经和赤纬度给出了脉冲星的方向矢量 \mathbf{n} (见式 (5.1.6)), 它是 XNAV 中的重要参数, 但高精度测量还涉及脉冲星与观测者的距离。

由于天体间的距离较大, 在天体物理和天文观测中常常采用秒差距 (parsec, pc) 的方法来进行粗略测量, 它的意义与周年视差的概念相联系, 后者是指星体到太阳和地球的方向差。设日地平均距离为 $R_E = 1\text{AU}$, 星体到太阳的距离为 $L \gg R_E$, 则星体到太阳和地球的两条连线所夹的角度为

$$\theta = \frac{R_E}{L} (\text{rad}) = 206265 \frac{R_E}{L} (")$$

对应于 1" 的距离 L 就是 1pc, 即

$$1\text{pc} = 206265 \times R_E = 3.0857 \times 10^{16}\text{m}$$

利用周年视差, 可以测量太阳系以外的星体的距离

$$L = \frac{3.0857}{\theta''} \times 10^{16}\text{m} \quad (5.1.13)$$

式中: θ'' 为 θ 的单位为角秒。显然, 用式 (5.1.13) 表示星体到观测者的距离只能精确到天文单位。

由于脉冲星本身发射光子,可以通过测量色散延缓来估计脉冲星的距离。当光波从脉冲星到达观测者时,要受到宇宙中星际介质的色散,使得不同频率的波到达观测者的时间不同,低频脉冲要比高频脉冲到达的时间延缓一些,这种现象称作色散延缓。

星际介质可以视为等离子体,假设星际介质为理想的电子等离子体,其振荡频率为

$$f_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{\pi m}}$$

式中: n_e 为电子的数密度(单位体积的电子数); e 和 m 分别为电子的电量和质量。设在等离子体中传播的光波的频率和波矢分别为 f 和 $k = 1/\lambda$, 则它们满足色散关系

$$f^2(k) = f_p^2 + k^2 c^2$$

由此求得光波的群速度(能量传播速度)

$$v_g = \frac{df(k)}{dk} = c \left(1 - \frac{f_p^2}{f^2} \right)^{1/2} \quad (5.1.14)$$

根据式(5.1.14), 中心频率为 f 的光波从脉冲星到达观测者的传播时间为

$$t(f) = \int_0^L \frac{dl}{v_g} = \frac{1}{c} \int_0^L \left(1 + \frac{f_p^2}{2f^2} \right) dl = \frac{L}{c} + \frac{D(L)}{f^2} \quad (5.1.15)$$

第2步是因为 $f_p \ll f$, 用到级数展开式。式中定义了

$$\begin{cases} D(L) = \frac{e^2}{2\pi mc} \int_0^L n_e dl = 1.345 \times 10^{-3} DM(L) \\ DM(L) = \int_0^L n_e dl \equiv \langle n_e \rangle L \end{cases} \quad (5.1.16)$$

D 取决于平均电子数密度 $\langle n_e \rangle$ 与光传播路径 L 的乘积, 称作色散量, 单位是 m/m^3 。由此可见, 频率较高的脉冲要比频率较低的脉冲到达时间小一些。图 5.1.6 是 PSR1641-45 消色散接收机观测记录, 高频脉冲比低频脉冲到达时间超前约一个周期。

通过对脉冲星的射电谱进行分析, 可以估计脉冲星的距离。根据式(5.1.15), 有色散时的光波到达时间比不存在色散的时间大一些, 这个差值反比于频率的平方, 即

$$\delta t_D = t(f) - \frac{L}{c} = \frac{D(L)}{f^2} \quad (5.1.17)$$

将式(5.1.17)对频率求导, 可得

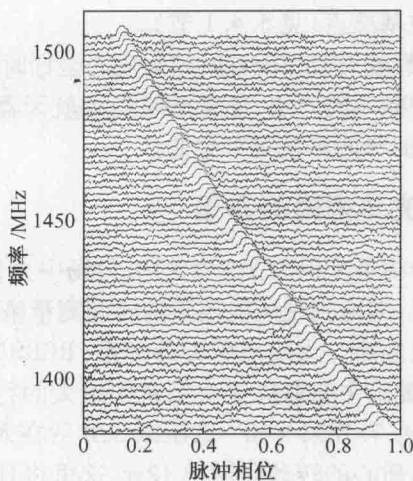


图 5.1.6 PSR1641-45 的脉冲相位与频率关系

$$\frac{\Delta t(f)}{\Delta f} = -\frac{2D(L)}{f^3} \quad (5.1.18)$$

如果测量到频率为 f 和 $f + \Delta f$ 的光传播时间差

$$\Delta t(f) = t(f + \Delta f) - t(f)$$

由式(5.1.18)得到色散量 D , 当已知平均电子数密度的情况下, 即可由式(5.1.16)求得脉冲星的距离 L 。例如太阳周围的数密度 $\langle n_e \rangle \approx 0.03 \text{ cm}^{-3}$, 由此求得脉冲星 PSR0950 + 80 的距离约为 300l. y.。显然, 由于光传播路径上的平均电子数密度难以精确测量, 用这种方法求得的距离只是一种大致的估算。

最后说明, XNAV 中的探测器是对脉冲星的软 X 射线能段 (1.0 ~ 20keV) 进行探测, 由于频率较高, 在下面几节讨论光传播时间时可以忽略色散延缓效应的影响。

5.2 XNAV 中的时间测量

XNAV 的导航方法与卫星导航类似, 也是围绕时间测量展开的。不同的是, 遥远脉冲星发射光波的时间无法知道, 需要确定时间和空间基准点 (二者不一定为同一时空点), 通过观测航天器与时间基准点接收相同脉冲星的脉冲到达时间来确定航天器相对于空间基准点的位置。基准点的选取原则上是任意的, 但需要考虑数据处理方便简单, 因而有几种选择:

- (1) 取 SSB 作为时间和空间基准点 (见 5.2.2 节);
- (2) 以 SSB 为空间基准点, 附近另一固定点为时间基准点 (见 5.2.3 节);

(3) 取地心为时空基准点(见 5.4.1 节)。

另外,还将导出观测航天器的固有时间与质心坐标时的转换公式,并认为可以通过调整航天器时钟频率的方法,使得调整后的航天器固有时间接近于质心坐标时,这对于 XNAV 的时间测量是有益的。

5.2.1 BCRS 中的光传播时间方程

在 3.4.4 节曾经介绍单个引力源产生的引力场中光传播时间方程,这里将分析多个引力源的情况,考虑到现阶段实际的时间测量精度在纳秒量级,太阳系天体的自转和扁率可以忽略。太阳系质心参考系(BCRS)的原点 SSB(记作 B)与日心 S 并不重合,其偏离主要取决于太阳系中最大的行星木星。木星的质量约为太阳的 10^{-3} ,距日心 $7.7833 \times 10^{11} \text{m}$,所以 SSB 约在太阳和木星连线上太阳表面处。日心绕太阳系质心的转动周期约 12yr,这里将日心的速度和加速度效应忽略。

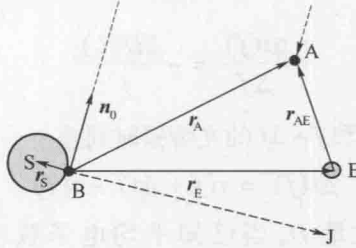


图 5.2.1 航天器(A)与 SSB(B)、太阳(S)、地球(E)和木星(J)的几何关系

图 5.2.1 给出太阳系天体、脉冲星和航天器的几何关系。为明确起见,位置矢量规定为:

\mathbf{r} 表示场点相对于 SSB 的矢径;

\mathbf{r}_K 表示 K 相对于 SSB 的矢径, $K = A, P, S, E, J, \dots$ 分别表示航天器、脉冲星、太阳、地球和木星等;

$\mathbf{r}_{XY} = \mathbf{r}_X - \mathbf{r}_Y$ ($X, Y = A, P, \dots$) 是 X 相对于 Y 的矢径;

\mathbf{n}_0 是脉冲星在参考时刻相对于 SSB 的单位矢量。

在 4 维时空 $\{x^0, x^1, x^2, x^3\} = \{ct, x, y, z\}$, BCRS 中时空度规应取为 2PN 度规,即

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2w}{c^2} + \frac{2w^2}{c^4}\right)c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2w}{c^2} + \frac{2w^2}{c^4}\right)d\mathbf{l}^2 = 0 \quad (5.2.1)$$

式中: $t = \text{TCB}$ 为 BCRS 的坐标时; $d\mathbf{l} = \sqrt{d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}}$ 为欧氏空间间距; w 为引力场的引力标量势。如果时间测量精度为纳秒量级,在讨论光传播时可以不考虑引力场各个天体产生的矢量势和四极矩参数,即可将太阳、地球和木星等天体看成

质点。引力标量势为太阳(S)、地球(E)和木星(J)等太阳系主要天体的牛顿引力势之和:

$$w(\mathbf{r}) = \sum_{K=S,E,\dots} \frac{\mu_K}{\xi_K} \quad (\mu_K = GM_K) \quad (5.2.2)$$

式中: $\xi_K = \mathbf{r} - \mathbf{r}_K$ 为从天体 K 指向场点的矢量, ξ_K 为其大小。因为引力势平方项为更高阶小量, 仅考虑太阳引力势的平方项。由式(5.2.1)解出光传播时间为

$$\begin{aligned} cdt &= \left(1 + \frac{2w}{c^2} + \frac{2w^2}{c^4} \right) dl \\ &= \left(1 + \frac{2\mu_S}{c^2 \xi_S} + \frac{2\mu_S^2}{c^4 \xi_S^2} + \sum_{K=E,J,\dots} \frac{2\mu_K}{c^2 \xi_K} \right) dl \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

光子的运动轨迹主要取决于太阳引力作用, 对太阳引力场积分时应取光子的 1PN 轨迹方程(见式(3.3.5)):

$$\xi_S = \frac{R_S}{\cos\phi_S + \varepsilon} \quad \left(\varepsilon = \frac{2\mu_S}{c^2 R_S} < 10^{-5} \right) \quad (5.2.4)$$

式中: R_S 为太阳到光线(脉冲星到航天器连线)的最近距离; ϕ_S 为 ξ_S 与 R_S 的夹角。这是一个在日心、脉冲星和航天器构成的平面内的曲线方程。对于除太阳以外的天体积分, 可将光子的轨迹取为直线方程:

$$\xi_K = \frac{R_K}{\cos\phi_K} \quad (K = E, J, \dots) \quad (5.2.5)$$

式中: R_K 为其他天体 K 到光线的最近距离; ϕ_K 为 ξ_K 与 R_K 的夹角。可见, 无论是对太阳还是其他星体积分时, 都只需在 2 维空间进行, 因而欧氏空间间隔可以表示为 2 维极坐标形式 $\{\xi, \phi\}$:

$$dl = \sqrt{d\xi_K^2 + \xi_K^2 d\phi_K^2} = \begin{cases} \frac{R_K(1 + \varepsilon \cos\phi_K)}{(\cos\phi_K + \varepsilon)^2} d\phi_K & (K = S) \\ \frac{R_K}{\cos^2\phi_K} d\phi_K & (K \neq S) \end{cases} \quad (5.2.6)$$

设光子在 t_P 时刻从脉冲星发出, 观测航天器接收到光子的时间为 t_A 。将式(5.2.4)~式(5.2.6)代入式(5.2.3)后沿光子路径积分并忽略高阶小量, 得到光子从脉冲星到航天器的传播时间:

$$t_A - t_P = \frac{r_{PA}}{c} + \sum_K \frac{2\mu_K}{c^3} \ln \left(\frac{r_{PK} + \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_{PK}}{r_{AK} + \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_{AK}} \right) + f(\mathbf{r}_{AS}, \mathbf{r}_{PS}) \quad (5.2.7)$$

$A \rightarrow B (r_B = 0)$, 就得到光子从脉冲星到达 SSB 的时间差:

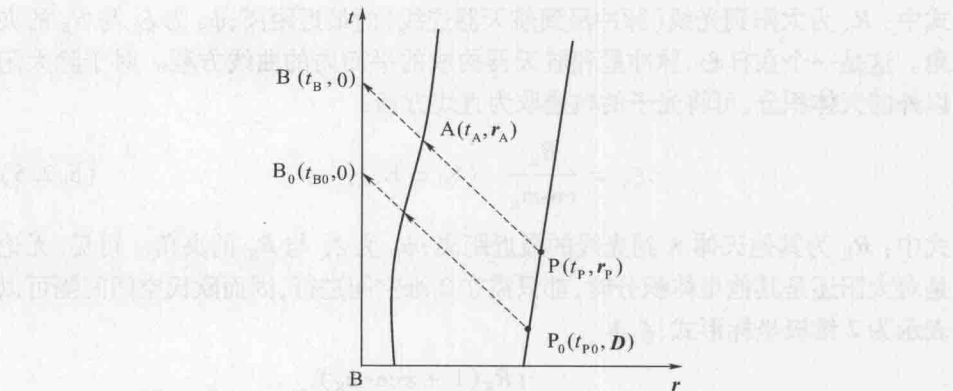


图 5.2.2 脉冲星(P)发射光子和航天器(A)、SSB(B)接收光子时空图

$$t_B - t_A = \frac{r_P - r_{PA}}{c} + \sum_K \frac{2\mu_K}{c^3} \ln \left(\frac{r_{AK} + \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_{AK}}{r_{BK} + \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_{BK}} \right) + f(\mathbf{r}_{BS}, \mathbf{r}_{PS}) - f(\mathbf{r}_{AS}, \mathbf{r}_{PS}) \quad (5.2.10)$$

设脉冲星在 BCRS 中的速度为 v_p , 在参考时间 t_{p0} 位于 $D = Dn_0$ 处, 在 $t_p =$

$t_{P0} + \Delta t_P$ 时刻位于 \mathbf{r}_P 处,注意到 $D > 10^6 r_A$, 可求得

$$\begin{cases} \mathbf{r}_P = D\mathbf{n}_0 + \mathbf{v}_P \Delta t_P \\ r_P = \sqrt{\mathbf{r}_P \cdot \mathbf{r}_P} = D + \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{v}_P \Delta t_P + \frac{v_P^2 - (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{v}_P)^2}{2D} \Delta t_P^2 + O(D^{-2}) \\ r_{PA} = \sqrt{\mathbf{r}_{PA} \cdot \mathbf{r}_{PA}} = r_P - \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_A + \frac{r_A^2 - (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_A)^2}{2D} \\ \quad - \frac{\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{v}_P - (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_A)(\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{v}_P)}{D} \Delta t_P + O(D^{-2}) \end{cases} \quad (5.2.11)$$

$$r_P - r_{PA} = \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_A - \frac{r_A^2 - (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_A)^2}{2D} + \frac{\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{v}_P - (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_A)(\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{v}_P)}{D} \Delta t_P \quad (5.2.12)$$

故式(5.2.9)成为

$$\begin{aligned} t_B - t_A &= \frac{\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_A}{c} + \frac{1}{cD} \left[- (r_A^2 - (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_A)^2)/2 \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{v}_P - (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_A)(\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{v}_P)) \Delta t_P \right] \\ &\quad + \sum_K \frac{2\mu_K}{c^3} \ln \left(\frac{r_{AK} + \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_{AK}}{r_K - \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_K} \right) + f(\mathbf{r}_{BS}, \mathbf{r}_{PS}) - f(\mathbf{r}_{AS}, \mathbf{r}_{PS}) \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

这就是时间转换公式。

顺便指出, Sheikh 等人提出的公式为

$$\begin{aligned} t_B - t_A &= \frac{\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_A}{c} + \frac{1}{cD} \left[- (r_A^2 - (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_A)^2)/2 + \mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_S \right. \\ &\quad \left. - (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_A)(\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_S) + (\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{v}_P - (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_A)(\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{v}_P)) \Delta t_P \right] \\ &\quad + \sum_K \frac{2\mu_K}{c^3} \ln \left| \frac{r_{AK} + \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_{AK}}{r_K - \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_K} + 1 \right| + O\left(\frac{2\mu_S^2 D}{c^5 D_y^2}\right) \end{aligned} \quad (5.2.14)$$

比较这两式,有以下区别:(1) 式(5.2.13)的第2部分显然与式(5.2.14)不同,这一部分是脉冲星到太阳系质心和航天器的欧氏几何路径差的修正,与日心在BCRS中的矢量 \mathbf{r}_S 不应该有关系;(2) 第3部分与式(5.2.14)略有区别,取太阳系主要天体为太阳、地球和木星,由于 $r_A \gg r_S, r_A \approx r_E, r_A \ll r_J$, 可得这三项近似为 $10^{-5} \text{s}, 10^{-10} \text{s}, 10^{-8} \text{s}$;(3) 第4部分包括最后两项,与式(5.2.14)中的忽略的最后一项也不同。由于 r_S 约在 10^{-8}m 量级,光线到达太阳系质心的弯曲效应较

大,如果取脉冲星距太阳系质心 100pc,该项的量级可达 10^{-2} s,不能轻易忽略。

5.2.3 SSB“等效时间”为基准的观测方程

式(5.2.13)中的 t_B 是指光子实际到达 SSB 的时间,但是,我们不可能在 SSB 放置探测器接收光子,因此它也是无法知道的。于是,有文献提出应该采用光子到达 SSB 的一种等效时间 \tilde{t}_B 替代之。经过仔细论证,发现这两种方法的区别是时间基准不同,从原理上讲都是可行的。由于在实际应用中,时间基准的确定涉及到许多工程问题,取 t_B 还是 \tilde{t}_B 对 XNAV 的影响是很大的。下面对这两种方法的异同作一详细说明。

将式(5.2.9)重新写成

$$t_B = t_P + \frac{r_P}{c} + \sum_K \frac{2\mu_K}{c^3} \ln(r_{PK} + \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_{PK}) - \sum_K \frac{2\mu_K}{c^3} \ln(r_{BK} + \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_{BK}) + f(\mathbf{r}_{BS}, \mathbf{r}_{PS}) \quad (5.2.15)$$

式(5.2.15)右边前3项仅与脉冲星位置及自行有关,反映的是脉冲星的固有特性,将其定义为 \tilde{t}_B ,上式就变成

$$\begin{aligned} \tilde{t}_B &= t_P + \frac{r_P}{c} + \sum_K \frac{2\mu_K}{c^3} \ln(r_{PK} + \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_{PK}) \\ &= t_B + \sum_K \frac{2\mu_K}{c^3} \ln(r_{BK} + \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_{BK}) - f(\mathbf{r}_{BS}, \mathbf{r}_{PS}) \end{aligned} \quad (5.2.16)$$

它的物理意义很明确,是光子到达 SSB 的时间加上一个常数,可以粗略理解为 SSB 附近的一个固定空间点接收光子的时间,姑且称作光子到达 SSB 的“等效时间”。

将式(5.2.16)代入式(5.2.13),得到

$$\tilde{t}_B - t_A = \frac{\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_A}{c} + \delta t_a + \delta t_v + \delta t_{g1} + \delta t_{g2} \quad (5.2.17)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \delta t_a &= -\frac{1}{2cD} [r_A^2 - (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_A)^2] = -\frac{1}{2cD} |\mathbf{n}_0 \times \mathbf{r}_A|^2 \\ \delta t_v &= \frac{\Delta t_P}{cD} [\mathbf{v}_P - (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{v}_P) \mathbf{n}_0] \cdot \mathbf{r}_A = \frac{1}{cD} \mathbf{d} \cdot \mathbf{r}_A \\ \delta t_{g1} &= \sum_K \frac{2\mu_K}{c^3} \ln(r_{AK} + \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_{AK}) \approx \frac{2\mu_S}{c^3} \ln(r_A + \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_A) \\ \delta t_{g2} &= -f(\mathbf{r}_{AS}, \mathbf{r}_{PS}) \end{aligned} \right. \quad (5.2.18)$$

由于没有考虑太阳等引力源的多极矩和矢量势,式(5.2.18)在计时精度为 10^{-10} s 之内是严格的。此式的优点在于方程右边仅与观测者的位矢以及脉冲星方向矢量有关,与脉冲星的性质有关的部分反映在计时基准之中。

下面对式中各项加以分析和说明,在讨论中取航天器和脉冲星数据的数量级 r_A 为 10^{11} m, D 为 10^{19} m, $v_{P\perp}$ 为 10^5 m/s。

(1) 脉冲星视差修正项 δt_a

它是对脉冲星视差的修正,与航天器的横向位置 $|\mathbf{n}_0 \times \mathbf{r}_A|$ 有关,其量级为 10^{-5} s。该项加上 $\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_A/c$ 称作 Roamer 延缓,原因是这样的:在天文测量中,一般用秒差距(pc)或色散延缓效应来测量遥远天体到 SSB 的距离(见 5.1.4 节),由此求得的是脉冲星到 SSB 的距离 r_p 。但由式(5.2.12)可知,在不计自行的情况下,脉冲星到航天器 A 的实际距离应该为

$$r_{PA} = r_p - \left[\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_A - \frac{1}{2D}(r_A^2 - (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_A)^2) \right]$$

光传播时间 r_p/c 与 r_{AP}/c 的差值就是 Roamer 延缓,它是一种几何修正而非物理效应。

(2) 脉冲星自行修正项 δt_v

它是由于脉冲星在 BCRS 中的固有运动(自行)产生的,取决于脉冲星垂直于 \mathbf{n}_0 运动的横向移动距离

$$d = [\mathbf{v}_p - (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{v}_p)\mathbf{n}_0] \Delta t_p = \mathbf{v}_{P\perp} \Delta t_p$$

式中: $\mathbf{v}_{P\perp}$ 为脉冲星垂直于 \mathbf{n}_0 的横向运动速度; $\Delta t_p = t_p - t_{p0}$ 为脉冲星从参考时刻开始发射 N 个脉冲的时间间隔,与 SSB 接收 N 个脉冲的时间间隔 $\Delta t_B = t_B - t_{B0}$ 是不同的,这可以从图 2.5.2 中明显看出。二者的关系可由式(5.2.9)和式(5.2.11)算出:

$$\Delta t_B - \Delta t_p = \frac{\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{v}_p}{c} \Delta t_p + \frac{v_p^2 - (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{v}_p)^2}{2cD} \Delta t_p^2 + \dots \quad (5.2.19)$$

右边的两项即为 $(r_p - D)/c$,省略的高阶小量对应于相对论效应的有关项。式(5.2.19)表明二者的相对误差约为 10^{-3} ,但考虑到 δt_v 本来就是小量,用 Δt_B 代替 Δt_p 产生的误差可以忽略不计。该项的数量级约为 $10^{-11} \Delta t_B$,当 Δt_B 不是很大时可以忽略。

(3) 引力延缓修正项 δt_{gl}

由于引力场中光子的坐标速度小于真空中光速,由此产生的时间延缓也称作 Shapiro 效应(见 2.5.4 节)。实际上它是根据引力场的 1PN 度规并将光子轨迹取为直线导出来的,严格地讲应称作 1 阶相对论效应修正项。取引力源为太阳(S)、地球(E)和木星(J),该部分为

$$\delta t_{g1} = \frac{1}{c} [R_E \ln(r_{AS} + \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_{AS}) + R_{gE} \ln(r_{AE} + \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_{AE}) + R_{gJ} \ln(r_{AJ} + \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_{AJ})]$$

这3项的数量级分别为 10^{-5}s , 10^{-10}s , 10^{-8}s , 因此在时间测量精度为 10^{-8}s 时取第1项即可。

(4) 光线弯曲修正项 δt_{g2}

该项是由于太阳引力场中光子轨迹的弯曲以及 2PN 度规中太阳质量平方项的贡献, 可称作 2 阶相对论效应修正项或光线弯曲修正项。在以下的讨论中忽略该项。

5.2.4 航天器固有时与地球时的转换

上面讨论的光子到达航天器的时间值 $t = \text{TCB}$ 是 BCRS 的坐标时, 而在 XNAV 的实际测量中, 真实记录的时间是航天器携带的时钟显示的钟面时, 即航天器的固有时 τ 。因此还需完成航天器的固有时与质心坐标时的变换。

如果时间测量精度为纳秒量级, 在讨论引力场中物体(非光子)的运动时, 时空度规只需取 1PN 度规(如果要求更高精度, 则应取 2PN 度规):

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{2w}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2w}{c^2}\right) dl^2 \quad (5.2.20)$$

对于地球周围的航天器, 其引力势为太阳和地球的引力势之和, 由 $r_{ES} \gg r_{AE}$ 可知

$$\begin{aligned} w_A(\mathbf{r}_A) &= w_E(\mathbf{r}_{AE}) + w_S(\mathbf{r}_{ES} + \mathbf{r}_{AE}) \\ &= w_E(\mathbf{r}_{AE}) + w_S(\mathbf{r}_{ES}) + \dot{\mathbf{v}}_E \cdot \mathbf{r}_{AE} \end{aligned}$$

其中, $\dot{\mathbf{v}}_E \approx \nabla w_S$ 为地球绕太阳系质心的公转加速度, 这里已经忽略了太阳的加速度。航天器在 BCRS 中的速度由相对于地球的速度和地球公转速度构成, 将 $\dot{\mathbf{r}}_A = \dot{\mathbf{r}}_E + \dot{\mathbf{r}}_{AE}$ 记作 $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_E + \mathbf{v}_{AE}$, 则有

$$v_A^2 = v_E^2 + v_{AE}^2 + 2\mathbf{v}_E \cdot \dot{\mathbf{r}}_{AE}$$

由以上 3 式可得航天器的固有时与质心坐标时的关系:

$$\begin{aligned} d\tau &= \left(1 - \frac{w_A}{c^2} - \frac{v_A^2}{2c^2}\right) dt \\ &= \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_{AE} \cdot \mathbf{v}_E) + \frac{\mu_S}{r_{ES}} + \frac{v_E^2}{2} + \frac{\mu_E}{r_{AE}} + \frac{v_{AE}^2}{2}\right)\right] dt \quad (5.2.21) \end{aligned}$$

式(5.2.21)右边后 5 项是高阶小量, 可以采用经典无摄运动规律。设 a_E 是地球绕太阳做椭圆运动的半长轴, 根据经典椭圆运动规律(见式(3.4.8)~式(3.4.13))

$$v_E^2 = \frac{2\mu_S}{r_{ES}} - \frac{\mu_S}{a_E}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_{ES} \cdot \mathbf{v}_E) = v_E^2 - \frac{\mu_S}{r_{ES}}$$

可得

$$\frac{\mu_S}{r_{ES}} + \frac{v_E^2}{2} = \frac{3\mu_S}{2a_E} + 2 \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_{ES} \cdot \mathbf{v}_E) \quad (5.2.22)$$

将式(5.2.22)代入式(5.2.21)后对时间积分,就得到

$$\Delta\tau = \left(1 - \frac{3\mu_S}{2c^2 a_E}\right)\Delta t - \frac{1}{c^2}\Delta(\mathbf{r}_{AE} \cdot \mathbf{v}_E + 2\mathbf{r}_{ES} \cdot \mathbf{v}_E) - \frac{1}{c^2} \int_t^{t+\Delta t} \left(\frac{\mu_E}{r_{AE}} + \frac{v_{AE}^2}{2}\right) dt \quad (5.2.23)$$

式中:代号 $\Delta(f) = f(t + \Delta t) - f(t)$ 。这就是一般情况下,航天器固有时与质心坐标时的变换关系。

在现阶段,利用 X 射线脉冲星为高轨地球卫星导航是比较实际的。设卫星椭圆轨迹长半轴为 a_{EA} ,利用式(5.2.22)可将式(5.2.23)中的积分解出:

$$\int_t^{t+\Delta t} \left(\frac{\mu_E}{r_{AE}} + \frac{v_{AE}^2}{2}\right) dt = \frac{3\mu_E}{2a_{AE}}\Delta t + 2\Delta(\mathbf{r}_{AE} \cdot \mathbf{v}_{AE})$$

所以,质心坐标时与卫星固有时的变换关系为

$$\Delta t = \Delta\tilde{\tau} + \frac{1}{c^2}\Delta(\mathbf{r}_{AE} \cdot \mathbf{v}_E + 2\mathbf{r}_{AE} \cdot \mathbf{v}_{AE} + 2\mathbf{r}_{ES} \cdot \mathbf{v}_E) \quad (5.2.24)$$

这里仿照卫星导航中的工程设计,定义了一个时钟,其振荡频率(正比于固有时)与航天器携带时钟标称频率的关系满足

$$\begin{cases} \Delta\tilde{\tau} = (1 + L)\Delta\tau \\ L = \frac{3\mu_S}{2c^2 a_E} + \frac{3\mu_E}{2c^2 a_{AE}} \end{cases} \quad (5.2.25)$$

对于地球同步卫星,频移因子 L 约为 1.5×10^{-8} 。也就是说,可以在 XNAV 测量中,将航天器携带原子钟的标称频率按式(5.2.25)调大一些,用调整后的时钟纪录的时间 $\tilde{\tau}$ 就已经包含了频移因子的影响。

如果卫星轨迹的偏心率很小,近似有 $\mathbf{r}_{AE} \cdot \mathbf{v}_{AE} \approx 0$,又因为地球公转轨迹偏心率 $e = 0.0167$,近似满足 $\mathbf{r}_{ES} \cdot \mathbf{v}_E \approx 0$,故式(5.2.24)可简化为

$$\Delta t \approx \Delta\tilde{\tau} + \frac{1}{c^2}\Delta(\mathbf{r}_{AE} \cdot \mathbf{v}_E) \quad (5.2.26)$$

在实际测量中,还应该将坐标时转换成 XNAV 工程的系统时间。假设 XNAV 以 COMPASS 的北斗时(BeiDou Time, BDT)为时间基准,由于 BDT 与 TT 的频率相同,利用式(3.2.47)可知

$$\begin{cases} \Delta t = (1 + L_B) \Delta t_{\text{BDT}} \\ L_B = 1.550519768 \times 10^{-8} \end{cases} \quad (5.2.27)$$

代入式(5.2.24)即可得到卫星固有时与 BDT 的转换关系。

5.3 BCRS 中的绝对定位模型

根据上面导出的光子从脉冲星到达航天器和 SSB 的时间差值,可以确定航天器相对于 SSB 的位置。但是,还应该考虑多普勒效应与航天器速度的关系。这是因为 XNAV 的观测是通过比较航天器探测到的脉冲观测轮廓与相应脉冲星的标准轮廓得到的,而在航天器的动态测量中,观测轮廓的形成又必须考虑航天器的运动状态。如果以航天器某一时刻的速度为基础进行脉冲轮廓的叠加,就可以得到不同于标准轮廓周期的观测轮廓,将两种轮廓的周期进行比较就能够确定航天器的速度。下面首先根据位置测量方程导出多普勒速度观测方程,然后给出 6 维联合观测方程,最后分析观测脉冲轮廓的叠加方法,比较观测轮廓与标准轮廓,提取观测量时间偏差和频率漂移。

5.3.1 多普勒速度观测方程

如图 5.3.1 所示,时间轴也是太阳系质心(SSB, B)的世界线,曲线是航天器(记作 A)的世界线,脉冲星发射的脉冲沿光锥到达太阳系。设脉冲星发射第 1 个脉冲到达 SSB 和航天器两个事件的时空坐标分别为 $B(t_B, 0)$ 和 $A(t, r)$,如果时间测量精度在 10^{-8} s 量级,则这两个事件的时间差与航天器位置矢量的关系式(5.2.17)给出:

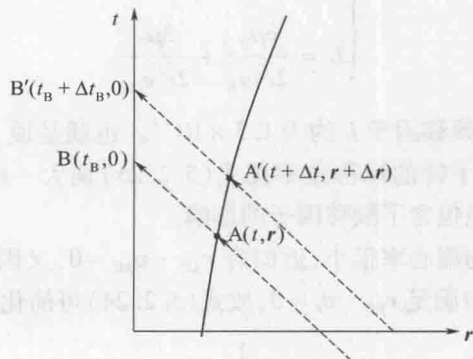


图 5.3.1 SSB(B)和航天器(A)接收脉冲时空图

$$c(\tilde{t}_B - t) = \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r} + \rho(\mathbf{r}) \quad (5.3.1)$$

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{(\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r})^2 - r^2}{2D} + R_g \ln(r + \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}) + \frac{1}{D} \mathbf{d} \cdot \mathbf{r} \quad (5.3.2)$$

函数 $\rho(\mathbf{r})$ 是具有长度量纲的高阶小量, 式中的时间是指质心坐标时 $t = \text{TCB}$, \tilde{t}_B 是光子到达 SSB 的等效时间, $R_g = 2GM_s/c^2$ 是太阳的引力半径。

再设第 $s+1$ 个脉冲到达 SSB 和航天器两事件的时空坐标分别为 $B'(t_B + \Delta t_B, 0)$ 和 $A'(t + \Delta t, \mathbf{r} + \Delta \mathbf{r})$, 由式(5.3.1)可得

$$c(\Delta t_B - \Delta t) = (\mathbf{n}_0 + \nabla \rho) \cdot \Delta \mathbf{r} = \mathbf{n} \cdot \Delta \mathbf{r} \quad (5.3.3)$$

式中的梯度为

$$\nabla \rho(\mathbf{r}) = \frac{(\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r})\mathbf{n}_0 - \mathbf{r}}{D} + \frac{R_g(\mathbf{n}_0 + \hat{\mathbf{r}})}{r + \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{d}}{D} \quad (5.3.4)$$

式中: $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ 为航天器单位矢量, 右边第 1 项是脉冲星相对于航天器的方向矢量 \mathbf{n}_A 与 \mathbf{n}_0 的矢量差, 而 $\nabla \rho$ 则是 \mathbf{n} 与 \mathbf{n}_0 的矢量差, 即 \mathbf{n} 相对于 \mathbf{n}_0 的夹角 $\theta(\mathbf{n}, \mathbf{n}_0)$, 其量级约 10^{-8}rad 。如果考虑现阶段的测量精度, 脉冲星方向矢量的测量误差 $|\delta \mathbf{n}|$ 大于 $\theta(\mathbf{n}, \mathbf{n}_0)$, 在测量精度要求不高的情况下可以忽略 $\nabla \rho$ 的影响。

式(5.3.3)反映的正是用坐标时度量的多普勒频移效应:

$$\frac{P_B(t) - P(t)}{P(t)} = \frac{\Delta t_B - \Delta t}{\Delta t} = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c} \quad (5.3.5)$$

式中: $P(t)$ 、 $P_B(t)$ 分别为用质心坐标时度量的 SSB 和航天器接收脉冲的周期。在实际测量中, 航天器上接收脉冲的周期由携带原子钟的固有时度度量 $P(\tau) = P$, 因为在广义相对论中只有在同一空间点才能比较时钟, 还应将 $T_B(t)$ 转换成航天器固有时度量的周期 $P_B(\tau) = P_B$, 而不是太阳系质心的固有时。根据 BCRS 中航天器固有时与质心坐标时变换关系式(5.2.23), 用航天器固有时度量的周期仍然满足上式(5.3.5)关系。定义频偏或频移因子

$$\zeta = \frac{P_B - P}{P} = \frac{f - f_B}{f_B} \quad (5.3.6)$$

由上面两式得到多普勒速度观测方程

$$\zeta = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c \quad (5.3.7)$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_0 + \nabla \rho \approx \mathbf{n}_0 + \frac{\mathbf{d}}{D} \quad (5.3.8)$$

因为 \mathbf{d} 是在 $\Delta t_p \approx \Delta t_B$ 时间内脉冲星移动的横向距离, 所以 \mathbf{n} 可看成脉冲星当前方向矢量。

5.3.2 位置和速度联合观测方程

设探测器同时对选定的 3 颗脉冲星(用上标 $a=1,2,3$ 表示)进行探测,如果 SSB 接收到每一颗脉冲星的时间和周期(\hat{t}_B^a, P_B^a)为已知量,根据航天器测量到 3 颗脉冲星的时间和周期(t^a, P^a),从而得到 3 个时间差和 3 个频移因子(τ^a, ζ^a),其中

$$\tau = \hat{t}_B - t \pm mP_B$$

是小于一个周期的时间差, m 为整波数(模糊度)。这 6 个观测量与航天器的 3 维位置和 3 维速度的关系由式(5.3.1)和式(5.3.7)决定,共有 6 个方程:

$$\begin{cases} c\tau^a = \mathbf{n}_0^a \cdot \mathbf{r} + \rho^a(\mathbf{r}) \pm cm^a P_B^a \\ c\zeta^a = \mathbf{n}^a \cdot \mathbf{v} \end{cases} \quad (5.3.9)$$

注意到 $\delta\rho(\mathbf{r}) = \nabla\rho \cdot \delta\mathbf{r}$, 式(5.2.9)的变分为

$$\begin{cases} c\delta\tau^a = \mathbf{n}^a \cdot \delta\mathbf{r} \\ c\delta\zeta^a = \mathbf{n}^a \cdot \delta\mathbf{v} \end{cases} \quad (5.3.10)$$

在实际测量过程中,预先估计在时刻 t 航天器的位置和速度($\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{v}}$),代入方程组(5.3.9)求得 6 个观测估计值($\hat{\tau}^a, \hat{\zeta}^a$);根据实际观测值(τ^a, ζ^a)又得到测量误差

$$\delta\tau^a = \tau^a - \hat{\tau}^a, \quad \delta\zeta^a = \zeta^a - \hat{\zeta}^a$$

再由方程组(5.3.10)解出($\delta\mathbf{r}, \delta\mathbf{v}$),从而确定航天器的真实位置和速度

$$\mathbf{r} = \hat{\mathbf{r}} + \delta\mathbf{r}, \quad \mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}} + \delta\mathbf{v} \quad (5.3.11)$$

方程组(5.3.10)可表示成矩阵形式,即

$$\delta\mathbf{Z}(t) = \mathbf{H}\delta\mathbf{X}(t) \quad (5.3.12)$$

其中

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x^i \\ v^i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z} = c \begin{bmatrix} \tau^a \\ \zeta^a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} n_i^a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & n_i^a \end{bmatrix} \quad (5.3.13)$$

分别为 6 维状态量、6 维观测量和 6×6 阶观测矩阵, ($x^i, v^i \mid i=1,2,3$) 为 (\mathbf{r}, \mathbf{v}) 的笛卡儿坐标分量; n_i^a ($a, i=1,2,3$) 表示第 a 颗脉冲星当前方向矢量的 i 分量; $\mathbf{0}$ 表示 3×3 零矩阵。这就是位置和速度联合观测方程。

在下面的讨论中将会看到,观测轮廓与标准轮廓的时间偏差和频率漂移是同时确定的。同时探测 3 颗脉冲星可以获得 3 个时间偏差和 3 个频率漂移观测量,采用 6 维联合观测方程,可以同时确定航天器的 3 维位置和 3 维速度。由于

联合观测方程中的位置和速度相互独立,它是真正意义上的 6 维状态空间 $\{x^i, \dot{x}^i\}$ 的观测方程。

如果不考虑多普勒速度观测方程,观测方程只包括式(5.3.12)的前 3 个方程:

$$c[\tau^a] = [n_i][\delta x^i] \quad (a, i = 1, 2, 3)$$

式中: 3 个矩阵分别为 $3 \times 1, 3 \times 3, 3 \times 1$ 阶。由此式并不能求解航天器的 3 维速度,必须与状态方程联立求解。这种导航模型中的位置和速度不是相互独立的变量,速度的测量本质上是通过位矢的差分得到的,位矢的测量误差必定反映在速度的误差之中。而在联合观测方程中,位矢的测量误差与速度的测量无关。例如,在比较标准轮廓与观测轮廓时,即使时间偏差的测量有误,只要周期的测量准确,仍然能够得到精确的速度值。

将时间离散化, $t = t_0, t_1, \dots, t_k, \dots, h = t_{k+1} - t_k$ 为滤波周期,联立 6 维联合观测方程式(5.3.12)和航天器状态方程,就得到离散系统的滤波方程

$$\begin{cases} \delta Z_k = H\delta X_k + U_k \\ \delta X_{k+1} = \Phi_k \delta X_k + W_k \end{cases} \quad (5.3.14)$$

式中: 函数的下标 k 是指 $f_k \equiv f(t_k)$; U, W 分别为 6 维观测噪声和状态噪声矢量。对于分段加速运动模型

$$\begin{cases} x_{k+1}^i = x_k^i + h v_k^i + \frac{1}{2} h^2 a_k^i \\ v_{k+1}^i = v_k^i + h a_k^i \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta x_{k+1}^i = \delta x_k^i + h \delta v_k^i + \frac{1}{2} h^2 \left(\frac{\partial a_k^i}{\partial x^j} \delta x^j + \frac{\partial a_k^i}{\partial v^j} \delta v^j \right) \\ \delta v_{k+1}^i = \delta v_k^i + h \left(\frac{\partial a_k^i}{\partial x^j} \delta x^j + \frac{\partial a_k^i}{\partial v^j} \delta v^j \right) \end{cases}$$

可知 6×6 阶状态转移矩阵为

$$\Phi_k = \begin{bmatrix} \delta_{ij} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial a_k^i}{\partial x^j} & h \delta_{ij} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial a_k^i}{\partial v^j} \\ h \frac{\partial a_k^i}{\partial x^j} & \delta_{ij} + h \frac{\partial a_k^i}{\partial v^j} \end{bmatrix} \quad (5.3.15)$$

式中: $i, j = 1, 2, 3$ 为行列号; δ_{ij} 为 3×3 阶单位矩阵元。

对于地球周围的航天器,在 BCRS 中的加速度为

$$a(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = -\mu_E \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_E}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_E|^3} + \mathbf{a}_p \quad (5.3.16)$$

$$\mathbf{a}_p = \mathbf{a}_Q(\mathbf{r}) + \mathbf{a}_G(\mathbf{r}) + \mathbf{a}_{LP}(\mathbf{r}) + \mathbf{a}_{PN}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \quad (5.3.17)$$

摄动加速度 \mathbf{a}_p 分别为地球多极矩、日月引力摄动、太阳光压和相对论效应产生的加速度,其中的后牛顿加速度 \mathbf{a}_{PN} 与卫星速度有关。当忽略加速度的相对论效应时,式(5.3.15)中的 $\partial \alpha_k^i / \partial v^j = 0$ 。

5.3.3 观测轮廓的叠加及频偏估计

在 XNAV 中,航天器搭载 X 射线探测器接收来自特定脉冲星方向的 X 光子,光子数随时间的分布序列是原始的导航信息。下面分析实际脉冲星信号的特征:

(1) 探测器接收到的脉冲星信号本身非常微弱,除了辐射较强的 Crab 脉冲星外,绝大多数备选脉冲星的流量为 $10^{-2} \sim 10^{-5} \text{ ph} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ (见表 5.1.1)。即使对接收面积为 1 m^2 的探测器在一个周期内也只能接收很少几个光子甚至没有,且信噪比很低。这些光子的到达时间是随机事件,在短时间内不可能显示脉冲星的辐射特性。因此,直接由光子数序列提取观测量是困难的,必须对一段时间(例如 1000s)的光子数序列按等相位点进行折叠,形成的观测脉冲轮廓才能体现特定脉冲星辐射的统计规律。

(2) 因为观测时间不能太短,又要考虑在此时间段内航天器的加速运动,包括航天器的速度、加速度和加速度变化率等运动量(如果观测时间很短,可以忽略加速度及其变率的影响)。由于多普勒效应导致光子数序列的周期不仅不同于标准轮廓的固有周期而且随时间发生变化,因此在脉冲轮廓的叠加过程中,除了获得航天器的速度外,还要获得加速度及其变化率等参数,而这些参数本身又是待测的未知量,这也是叠加过程的困难所在。

(3) 判断观测轮廓是否真实的标准在于它是否接近于标准轮廓的形状,可是二者不仅有频偏而且存在相位差或时延,这个时延又是待求的量,因此在估计观测轮廓的频偏参量的同时要估计时延。按照这一思想,观测脉冲轮廓的形成以及它与标准轮廓的时延和频偏等观测量的确定是同时完成的。

可见:将光子数序列叠加成脉冲轮廓并不是导航的目的而是手段,期望观测轮廓与已知的标准轮廓具有相同的统计特征是依据,在叠加过程中根据这个依据采用搜索或迭代的方法便可估计出轮廓的相位、频率及其变化率等。

将观测时间离散化 $t = t_0, t_1, \dots, t_i, \dots, T_{\text{obs}}$, 时间间隔为 $t_{i+1} - t_i = t_{\text{bin}}$ 。设 $z(t_i)$ 是 X 射线探测器在时间间隔 $t_i \sim t_{i+1}$ 内接收的光子数,光子数时间序列为 $\{z(t_i) \mid i = 0, 1, 2, \dots\}$, 等价地用相位表示成 $\{z(\varphi_i) \mid i = 0, 1, 2, \dots\}$, $\varphi_i \equiv \varphi(t_i)$ 为 t_i 时刻的相位,就统计效果来说,它应满足周期性条件:

$$z(\varphi_i + m) = z(\varphi_i) \quad (m = 1, 2, \dots, M) \quad (5.3.18)$$

设观测时间的起始时刻为 $t_0 = 0$, 当 t_i 与 t_0 相差不太大时,其相位是

$$\varphi(t_i) = \varphi(0) + ft_i + \frac{1}{2}\dot{f}t_i^2 + \frac{1}{6}\ddot{f}t_i^3 \quad (5.3.19)$$

式中: f, \dot{f}, \ddot{f} 分别为 t_0 时刻光子数序列的频率及其导数。根据多普勒速度观测方程式, 它们与 SSB 接收的脉冲轮廓频率 f_B 的关系是

$$\begin{cases} f = f_B(1 + \zeta) = f_B(1 + \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c) \\ \dot{f} = f_B\dot{\zeta} = f_B(\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}/c) \\ \ddot{f} = f_B\ddot{\zeta} = f_B(\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{a}}/c) \end{cases} \quad (5.3.20)$$

式中: $(\zeta, \dot{\zeta}, \ddot{\zeta})$ 分别为 t_0 时刻航天器相对于 SSB 的速度 \mathbf{v} 、加速度 \mathbf{a} 及其变化率 $\dot{\mathbf{a}}$ 在 \mathbf{n} 上投影与 c 的比值。将它们合在一起, 构成一个 3 维列矢量, 姑且称作频偏参量(矢量):

$$\boldsymbol{\zeta} = [\zeta \quad \dot{\zeta} \quad \ddot{\zeta}]^T = \frac{1}{f_B} [f - f_B, \dot{f}, \ddot{f}]^T \quad (5.3.21)$$

频偏参量也可看成航天器的 3 个状态参数 (v_n, a_n, \dot{a}_n) 构成的状态矢量。

如图 5.3.2 所示, 将光子数序列的时间按周期划分, 第 1 个周期内的时间为 $t_k \equiv t_{k,0}$, 第 $m+1$ 个周期的时间记作 $t_{k,m} (m=1, 2, \dots, M-1)$, M 为观测时间内的周期数, 使得 $t_{k,m}$ 与 t_k 的相位相等(即相差整数倍), 即

$$\varphi(t_{k,m}) - \varphi(t_k) = m \quad (m=1, 2, \dots, M-1) \quad (5.3.22)$$

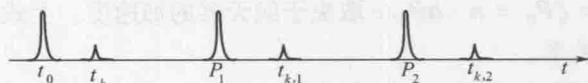


图 5.3.2 光子数时间序列示意图

由式(5.3.20)、式(5.3.21)得到的等相位点的时间关系式

$$(1 + \zeta)(t_{k,m} - t_k) + \frac{1}{2}\dot{\zeta}(t_{k,m}^2 - t_k^2) + \frac{1}{6}\ddot{\zeta}(t_{k,m}^3 - t_k^3) = mP_B \quad (5.3.23)$$

对地球周围的航天器, 频偏参量 3 个分量在国际单位制下的量级为

$$\zeta/\dot{\zeta}/\ddot{\zeta} = 1/10^{-4}/10^{-8}$$

故在观测时间 $T_{\text{obs}} < 1000\text{s}$ 的情况下可用迭代的方法求解。在上式左边保留第 1 项得到零级近似, 再代回左边第 2、3 项, 可解出

$$t_{k,m}(\boldsymbol{\zeta}) = t_k + mP_1 \left[1 - \frac{\dot{\zeta}}{2}(mP_B + 2t_k) - \frac{\ddot{\zeta}}{6}(m^2P_B^2 + 3mP_Bt_k + 3t_k^2) \right] \quad (5.3.24)$$

$P_1 = P_B/(1 + \zeta)$ 为第 1 个周期的长度(精确到纳秒量级)。

光子数序列中第 $m(m=1, 2, \dots, M-1)$ 个周期的长度为

$$P_m = t_{0,m} - t_{0,m-1} = P_1 \left[1 - \frac{\dot{\zeta} P_B}{2} (2m-1) - \frac{\ddot{\zeta} P_B^2}{6} (3m^2 - 3m + 1) \right] \quad (5.3.25)$$

在一般情况下 ($\zeta \neq 0$), 序列的周期是变化的, 航天器的加速度及其变化率导致周期不均匀, 且随着观测时间的增加而增大。存在以下 3 种特例:

(1) 如果航天器相对于 SSB 静止 ($\zeta = \dot{\zeta} = \ddot{\zeta} = 0$), 序列的周期为

$$P_m = P_B = \text{常数}$$

(2) 如果航天器在观测时间内做匀速直线运动 ($\zeta \neq 0, \dot{\zeta} = \ddot{\zeta} = 0$), 则周期也是常值, 即

$$P_m = P_1 = \frac{P_B}{1 + \zeta} = \text{常数}$$

(3) 如果航天器在观测时间内做匀加速直线运动 ($\zeta \neq 0, \dot{\zeta} \neq 0, \ddot{\zeta} = 0$), 则第 m 个周期为

$$P_m = P_1 \left[1 - \frac{\dot{\zeta} P_B}{2} (2m-1) \right] \approx \frac{P_B}{1 + \zeta} (1 - m\kappa)$$

无量纲常数 $\kappa = \dot{\zeta} P_B = \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} P_B / c$ 取决于航天器的加速度。上式虽然不是常数, 但与 m 呈线性关系。

对于特定的脉冲星 (P_B) 和给定的参数 (k, m), 式 (5.3.27) 右边是频偏参量的非线性函数。但是, 如果根据预先估计的航天器运动状态 (v_n, a_n, \dot{a}_n) 求出频偏参量 ζ , 从而确定该参数下的等相位点时间 $t_{k,m}(\zeta)$, 当频偏参量的微小改变 $\delta\zeta$ 导致时间发生变化时, 新参量 $\zeta + \delta\zeta$ 下的时间可表示成

$$t_{k,m}(\zeta + \delta\zeta) = t_{k,m}(\zeta) + \mathbf{A}(k, m) \cdot \delta\zeta \quad (5.3.26)$$

$$\mathbf{A} = \nabla_{\zeta} t_{k,m} \approx -m T_B \left[1, \frac{1}{2} (m P_B + 2t_k), \frac{1}{6} ((m P_B)^2 + 3m P_B t_k + 3t_k^2) \right] \quad (5.3.27)$$

式中: 3 维行矢量 \mathbf{A} 仅与参数 (k, m) 有关, 故在 $t_{k,m}(\zeta)$ 的邻域内, $t_{k,m}(\zeta)$ 与 $\delta\zeta$ 呈线性关系, 当 ζ 的任一分量变大时, 都使得 $t_{k,m}$ 变小, 反之亦然。

假设频偏参量的初步估计值为 ζ , 根据式 (5.3.26) 计算出等相位点时间 $t_{k,m}(\zeta)$, 在时间间隔 $t_{k,m} \sim t_{k+1,m}$ 内的光子数是 $z(t_{k,m}(\zeta))$, 对 m 求和后就得到观测轮廓

$$x_k(\zeta) \equiv x(t_k(\zeta)) = \sum_{m=0}^{M-1} z(t_{k,m}(\zeta)) \quad (5.3.28)$$

如果频偏参量的初始估计值与真实值相差较大,得到的观测轮廓与标准轮廓的形状也会相差较大,我们应该采用统计方法做进一步估计。

例如采用周期折叠法,取频偏参量为 $\zeta + \delta\zeta$,由上面3式得到 $x_k(\zeta + \delta\zeta)$,计算统计量

$$\chi^2(\zeta + \delta\zeta) = \sum_{k=0}^{K-1} \left[\frac{x_k(\zeta + \delta\zeta) - \bar{x}}{\sigma_k} \right]^2 \quad (5.3.29)$$

式中: \bar{x} 和 σ_k 分别为光子数的平均值和标准差。对式(5.3.29)作 χ^2 假设检验,得到频偏参量的估计值 $\hat{\zeta}$,由此即可获得频偏估计值 $\hat{\zeta}$ 。不过,精确确定频偏参量的方法仍然在进一步研究中。

上面得到的观测轮廓的周期是 P_1 ,为了与标准轮廓做比较,应将其变成 P_B ,这只需对时间做重新标定:

$$t_k \rightarrow t_n = t_k P_B / P_1 = t_k (1 + \zeta) \quad (5.3.30)$$

由此得到的观测轮廓 $\{x_n(\zeta) \mid n=0, 1, \dots, N-1\}$ 就是周期为 P_B 的观测轮廓。

5.3.4 观测轮廓与标准轮廓的时延估计

脉冲星的标准轮廓是光滑的,而观测轮廓是在较短时间得到的“模糊”轮廓,将这两个轮廓做相位比较不可能像比较两列连续电磁波那样方便准确,这也是XNAV的测量精度不如卫星导航的根本问题。但是如果观测时间足够长,观测轮廓应该逐渐“清晰”,其形状与标准轮廓成比例,将这个轮廓称作理想轮廓。当测量时间较小时,实际轮廓相对于理想轮廓不可避免地存在偏差,因此将观测轮廓分成理想轮廓及其偏差两部分:

$$x(t_n) = \bar{x}(t_n) + x_e(t_n) \quad (5.3.31)$$

$$\bar{x}(t_n) = k[y_s(t_n + \tau) + y_N] \quad (5.3.32)$$

式中: $y(t_n) = y_s(t_n) + y_N$ 为积累标准轮廓; $y_s(t_n)$ 和 y_N 为标准轮廓的光子数分布中与时间有关和无关的部分,可以粗略地称为脉冲星信号和噪声(本底); $\tau < P_B$ 为标准轮廓与观测轮廓中等相位点的时间差,就是我们要确定的时间延迟;比例系数 $k \approx n_A / n_B$, n_A 和 n_B 分别是观测轮廓和标准轮廓的光子数总数; $\bar{x}(t_n)$ 为观测轮廓相对于标准轮廓的有规则偏差,可将其称作理想模型; $x_e(t_n) \ll x(t_n)$ 为随机噪声等因素造成的实际轮廓对理想轮廓的偏差。

假设脉冲信号满足泊松分布,将标准轮廓看成总体,观测轮廓的数据为子样,采用直方图的处理方法,其似然函数为

$$L(\tau) = \prod_{n=0}^{N-1} \frac{1}{x_n!} \mu_n^{x_n} e^{-\mu_n} \quad (5.3.33)$$

$$\mu_n(\tau) = k[y_s(t_n + \tau) + y_N] \quad (5.3.34)$$

均值满足

$$\sum_{n=0}^{N-1} \mu_n = \sum_{n=0}^{N-1} x_n = n_A$$

当 $x_n \gg 1$ 时似然函数的对数为

$$\ln L(\tau) = -\frac{1}{2}Q(\tau) + \sum_{n=0}^{N-1} [x_n \ln x_n - \ln(x_n!)] \quad (5.3.35)$$

其中

$$Q(\tau) = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{x_n - \mu_n(\tau)}{\sqrt{x_n}} \right)^2 \quad (5.3.36)$$

是最小二乘估计。根据极大似然法,当 $\tau = \hat{\tau}$ 为最优估计值时似然函数取极大值,等同于 Q 取极小值,即

$$Q(\hat{\tau}) = \min[Q(\tau)] \quad (5.3.37a)$$

或

$$Q'(\hat{\tau}) = 0 \quad (5.3.37b)$$

应该强调,TOA 是指理想轮廓与标准轮廓的时间延迟,与实际轮廓中的偏差 x_e 无关。因为当测量时间足够长时 $x_e \rightarrow 0$,而时延本身与测量时间无关。因此我们首先讨论观测轮廓趋于理想轮廓的情况: $x_n \rightarrow \bar{x}_n \approx \mu_n$,将这时的观测轮廓表示为 \bar{x}_n ,则式(5.3.36)退化成

$$Q(\tau) = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\bar{x}_n + \mu_n - \frac{2}{k\bar{y}} \bar{x}_n \mu_n \right) = -\frac{2}{\bar{y}} R(\tau) \quad (5.3.38)$$

式中: $\bar{y} = n_B/N$ 为积累标准轮廓的平均值,对低信噪比脉冲星($y_N \gg y_s$)近似有 $\bar{y} \approx y_N$; $R(\tau)$ 为积累观测轮廓与(无噪声)标准轮廓的互相关函数 g 为

$$R(\tau) = \sum_{n=0}^{N-1} \bar{x}(t_n) y_s(t_n + \tau) \quad (5.3.39)$$

于是式(5.3.38)等同于互相关函数取极大值,即

$$R(\hat{\tau}) = \max[R(\tau)] \quad (5.3.40a)$$

或

$$R'(\hat{\tau}) = 0 \quad (5.3.40b)$$

对观测和标准轮廓分别做离散傅里叶变换,得到不同频率的变换系数

$$\begin{cases} \bar{X}_k = |\bar{X}_k| e^{i\alpha_k} = \sum_k^{N-1} \bar{x}(t_n) e^{i\omega_k t_n} \\ Y_k = |Y_k| e^{i\alpha_k} = \sum_k^{N-1} y(t_n) e^{i\omega_k t_n} \end{cases} \quad (5.3.41)$$

$\omega_k = k\omega$ ($k = 1, 2, \dots$) 为基频 $\omega \equiv 2\pi/T_B$ 的整数倍, 式中定义了变换系数的幅值和幅角。由相关定理, 互相关函数可表示成

$$R(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \bar{X}_k^* Y_k e^{-i\omega_k \tau} = \frac{1}{N} (\bar{X}_0^* Y_0 + \sum_k \bar{X}_k^* Y_k e^{-i\omega_k \tau})$$

\bar{X}_k^* 是 \bar{X}_k 的复共轭; $\bar{X}_k^* Y_k$ 是互功率谱。根据式(5.3.36), 当 $\tau = \hat{\tau}$ 时上式中的求和部分取极大值, 即

$$\sum_k \bar{X}_k^* Y_k e^{-i\omega_k \hat{\tau}} = \max \left[\sum_k \bar{X}_k^* Y_k e^{-i\omega_k \tau} \right] = \sum_k |\bar{X}_k| |Y_k|$$

考虑到 $\hat{\tau} < T_B$, 故有

$$\beta_k - \bar{\alpha}_k - \omega_k \hat{\tau} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N-1) \quad (5.3.42)$$

在式(5.3.42)中取 $k=1$, 并记基频傅里叶变换系数 $\bar{X} \equiv \bar{X}_1$ 和 $Y \equiv Y_1$, 得到较为简单的时延估计公式

$$\hat{\tau} = \frac{\beta - \bar{\alpha}}{\omega} = \frac{P_B}{2\pi} (\arg(Y) - \arg(\bar{X})) \quad (5.3.43)$$

根据此式, 只须分别求出理想观测轮廓和标准轮廓的基频系数, 由它们的幅角之差即可确定时延。

上面得到的时延估计公式虽然与采用最大似然法得到的结论在形式上相同, 但这里是在观测轮廓接近于标准轮廓的前提下导出来的, 式(5.3.43)中的 $\bar{\alpha}$ 是理想轮廓而不是实际轮廓基频系数的幅角。下面进一步考虑实际观测轮廓。

设实际观测轮廓及其偏差的基频系数分别为 $X \equiv |X| e^{i\alpha}$ 和 $X_e \equiv |X_e| e^{i\alpha_e}$, 对式(5.3.31)做基频傅里叶变换, 得到

$$X = \bar{X} + X_e$$

上式是复平面 3 个矢量的关系式, 其幅角关系为

$$\alpha - \bar{\alpha} = \arccos \frac{|X|^2 + |\bar{X}|^2 - |X_e|^2}{2|X||\bar{X}|} \quad (5.3.44)$$

因 $X_e \neq 0$ 使得 $\alpha \neq \bar{\alpha}$, 这就是实际轮廓中的偏差产生的时延估计误差。

我们要证明: 对于特定的脉冲星以及特定的积累时间, 假设航天器在不同位置测量的观测轮廓的形状保持不变, 则偏差 $x_e(t)$ 对时延的影响也保持不变。

上面的假设是基于以下考虑:

(1) 如果航天器在时空点 A 的理想轮廓为 $\bar{x}(t_n)$, 当它运动到 A' 点时的轮廓应为 $\bar{x}(t_n + \Delta t)$, Δt 是两个轮廓等相位点的时间延迟。

(2) 实际观测轮廓虽然偏离理想轮廓, 但对合适的积累时间具有确定的泊松分布, 联合概率分布式的形式应该保持不变。如果观测轮廓在 A 点的均值和方差为 $\mu_n = V_n = \bar{x}(t_n)$, 到 A' 点时应变成 $\mu'_n = V'_n = \bar{x}(t_n + \Delta t)$ 。

(3) 因为实际观测轮廓和理想轮廓是具有相同均值的泊松分布, 泊松噪声的均值为 0, 其绝对值的均值也是 $\bar{x}(t_n)$ 的函数:

$$E(|x_e(t_n)|) = 2e^{-2\bar{x}_n} \sum_{m=0}^{\infty} m I_m(2\bar{x}_n)$$

I_m 是 m 阶第一类变形 Bessel 函数, 当 $\bar{x}_n \gg 1$ 时上式右边正比于 $(\bar{x}_n)^{-1/2}$ 。

因此就统计效果而言, 实际轮廓也应该具有和理想轮廓相同的变化规律。如果实际轮廓在 A 点满足式(5.3.31), 在 A' 点则应变为

$$x(t_n + \Delta t) = \bar{x}(t_n + \Delta t) + x_e(t_n + \Delta t)$$

对上式做基频傅里叶变换, 得

$$X' = \bar{X}' + X'_e$$

根据延迟定理可知 3 个矢量的幅值保持不变, 即

$$(X', \bar{X}', X'_e) = e^{-i\omega\Delta t} (X, \bar{X}, X_e)$$

故式(5.3.44)右边是与航天器位置无关的常量, 即

$$\alpha - \bar{\alpha} = \text{常数}$$

将上式代入式(5.3.43), 得到时延估计的实用公式

$$\hat{\tau} = \frac{P_B}{2\pi} (\arg(Y) - \arg(X)) + C \quad (5.3.45)$$

当观测轮廓的形状保持不变的情况下, 式中的 C 为常量, 可以通过最小二乘估计等方法来确定。

5.3.5 日地系平动点晕轨道卫星导航

XNAV 在空间技术中具有广阔的应用前景, 我们来分析应用 XNAV 的一个实例: 日地系第一平动点 (Lagrange 点) 周围晕轨道 (halo orbit) 卫星的定位。我国“夸父计划”打算将“夸父 A”卫星发射到该处, 用来监测日地空间天气连续变化现象。之前, 美国 NASA 和欧洲 ESA 发射的 ISEE、SOHO 和 ACE 等航天器也是定位于此。

采用 XNAV 技术为晕轨道卫星定位具有明显的优越性: (1) 日地系第一平动点距地球约为 150 万 km, 光信号在地面和卫星间的单向传播时间约为 5s, 使得地面与卫星联系较为困难, 搭载 XNAV 装置后可以减轻地面测量和通信的压

力;(2) 第一平动点的晕轨道本身不是稳定轨道,需要进行不断的轨道控制才能保持卫星的正常运行,采用 XNAV 后可通过卫星自身携带控轨装置使得轨道保持更为方便和精确;(3) 在晕轨道上运行的卫星定轨并不需要像地球卫星那样精确,一般说来,晕轨道卫星的定位精度只需要达到千米量级就足够了,因而光信号的时间测量精度只须要求在微秒量级,这是现在的 X 射线探测和信号处理技术完全能够达到的。

以 BCRS 为惯性系,太阳—地球系质心在 BCRS 中的加速度可以忽略,故将 SSB 近似取在太阳—地球系质心,以此为原点建立旋转坐标系(会合坐标系) $\{x, y, z\} = \{x^1, x^2, x^3\}$,其中 x^1, x^2 轴在黄道平面内, x^1 轴由 SSB 指向地球, x^2 轴同地球公转方向,如图 5.3.3(a) 所示。

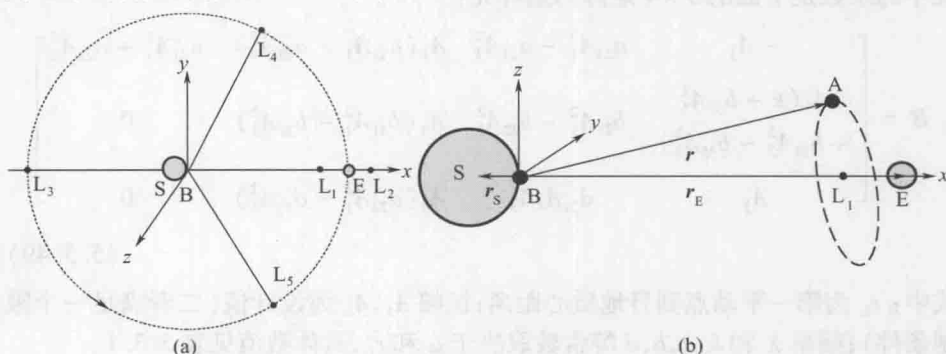


图 5.3.3 日地系的平动点及其晕轨道

(a) 日地系的 5 个平动点; (b) 日地系第一平动点周围的晕轨道。

设旋转坐标系在 BCRS 中的角速度为 $\Omega = \Omega e_3$, 太阳、地球的引力常数和矢径分别为 μ_S, r_S 和 μ_E, r_E 。采用无量纲化方法:

$$\mu = \frac{\mu_E}{\mu_S + \mu_E}, \quad \mu' = \frac{\mu_S}{\mu_S + \mu_E}, \quad \Omega = 1$$

矢径为 $r = (x^1, x^2, x^3)$ 的卫星在平动点周围的运动方程为

$$\ddot{r} + 2e_3 \times \dot{r} = \nabla W(r) \quad (5.3.46)$$

$$W(r) = \frac{\mu'}{|r - r_S|} + \frac{\mu}{|r - r_E|} + \frac{1}{2}[(x^1)^2 + (x^2)^2] \quad (5.3.47)$$

式中: $W(r)$ 为旋转坐标系中卫星所在处的等效引力势, 为太阳、地球质量产生的牛顿引力势和向心势之和。方程(5.3.43)有 5 个平动点, 包括 3 个共线平动点 L_1, L_2, L_3 和 2 个共角平动点 L_4, L_5 , 如图 5.3.3(a) 所示。其中共线平动点 L_1, L_2, L_3 是不稳定的, 但在共线平动点附近可以构造条件周期轨道。这里仅考虑位于太阳与地球之间的第一共线平动点周围的周期轨道。

根据 Legendre 函数的生成函数,可将引力势用 Legendre 多项式 P_n 展开,求出卫星相对于平动点的周期运动轨迹。Richardson 首先给出了轨迹的 3 阶分析解, Thurman 等人对此进行了修正,卫星相对于第一平动点的周期运动轨迹:

$$\begin{cases} x^1(t) - r_L = B_{11}\cos(\lambda t) + B_{12}\cos(2\lambda t) + B_{13}\cos(3\lambda t) + B_{14} \\ x^2(t) = B_{21}\sin(\lambda t) + B_{22}\sin(2\lambda t) + B_{23}\sin(3\lambda t) \\ x^3(t) = B_{31}\cos(\lambda t) + B_{32}\cos(2\lambda t - 3) + B_{33}\cos(3\lambda t) \end{cases} \quad (5.3.48)$$

式中的系数是下面的 3×4 矩阵的矩阵元:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -A_1 & a_{23}A_1^2 - a_{24}A_3^2 & A_1(a_{31}A_1^2 - a_{32}A_3^2) & a_{21}A_1^2 + a_{22}A_3^2 \\ A_1(k + b_{33}A_1^2 + b_{34}A_3^2 - b_{35}A_3^2) & b_{21}A_1^2 - b_{22}A_3^2 & A_1(b_{31}A_1^2 - b_{32}A_3^2) & 0 \\ A_3 & d_{21}A_1A_3 & A_3(d_{32}A_1^2 - d_{31}A_3^2) & 0 \end{bmatrix} \quad (5.3.49)$$

式中: r_L 为第一平动点到日地质心距离;振幅 A_1, A_3 为设计值(二者满足一个限制条件);频率 λ 和 k, a, b, d 等常数取决于 μ 和 r_L ,具体数值见表 5.3.1。

表 5.3.1 日地系第一平动点晕轨道数据

轨道参数	数值	轨道参数	数值
r_L	0.9899859817AU	b_{21}	-0.4924458751
λ	2.086453455	b_{22}	0.0607464672
A_1	206000km	b_{31}	0.8857007762
k	3.22927	b_{32}	0.0230198274
A_3	110000km	d_{21}	-0.3468654605
a_{21}	2.092695581	d_{31}	0.0190438701
a_{22}	0.2482976703	d_{32}	0.3980954252
a_{23}	-0.9059647954	d_{33}	-2.8451
a_{24}	-0.1044641164	b_{34}	-2.3021
a_{31}	0.7938201951	b_{35}	-1.8704
a_{32}	0.0082685385	—	—

式(5.3.48)称作平动点周围的晕轨道,可作为卫星的目标轨道,将其记作 $\mathbf{r}_h(t)$ 。当卫星实际轨道 $\mathbf{r}(t)$ 偏离目标轨道,状态量的差值为

$$\delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_h(t), \quad \delta \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}(t) - \dot{\mathbf{r}}_h(t)$$

对式(5.3.46)求变分,得到它们满足的方程

$$\delta \ddot{\mathbf{r}} + 2\mathbf{e}_3 \times \delta \dot{\mathbf{r}} = (\nabla \nabla W(\mathbf{r}_h)) \cdot \delta \mathbf{r} \quad (5.3.50)$$

式中:2阶梯度张量 $\nabla \nabla W(\mathbf{r}_h) \equiv \nabla \nabla W|_{\mathbf{r}_h(t)}$ 取晕轨道上的值。定义卫星的6维状态矢量 $\mathbf{X} = [x^i, v^i]^T$,则上式的分量方程可表示为矩阵形式

$$\delta \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{M}(t) \delta \mathbf{X} \quad (5.3.51)$$

其中

$$\mathbf{M}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ hW_{11} & hW_{12} & hW_{13} & 0 & 2 & 0 \\ hW_{12} & hW_{22} & hW_{23} & -2 & 0 & 0 \\ hW_{13} & hW_{23} & hW_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.3.52)$$

式中的矩阵元定义为

$$W_{ij} = \left. \frac{\partial^2 W}{\partial x^i \partial x^j} \right|_{\mathbf{r}_h(t)} \quad (i, j = 1, 2, 3; i \leq j)$$

具体表达式可由式(5.3.47)求出。

将卫星状态离散化 $\mathbf{X}(t) \rightarrow \mathbf{X}(t_k)$,时间步长为 $h = t_{k+1} - t_k (k=0, 1, 2, \dots)$ 。根据式(5.3.51)可得卫星(误差)状态方程

$$\delta \mathbf{X}_{k+1} = \Phi_k \delta \mathbf{X}_k \quad (5.3.53)$$

式中的状态转移矩阵 Φ 与变换矩阵 \mathbf{M} 的关系是

$$\Phi_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{tM(t)} dt = \mathbf{I}_{6 \times 6} + h\mathbf{M}(t_k) + \dots$$

做线性近似,相当于取分段匀加速运动模型,则有

$$\Phi_k = \begin{bmatrix} 1 + 0.5h^2 W_{11} & 0.5h^2 W_{12} & 0.5h^2 W_{13} & h & 0 & 0 \\ 0.5h^2 W_{12} & 1 + 0.5h^2 W_{22} & 0.5h^2 W_{23} & 0 & h & 0 \\ 0.5h^2 W_{13} & 0.5h^2 W_{23} & 1 + 0.5h^2 W_{33} & 0 & 0 & h \\ hW_{11} & hW_{12} & hW_{13} & 1 & 2h & 0 \\ hW_{12} & hW_{22} & hW_{23} & -2h & 1 & 0 \\ hW_{13} & hW_{23} & hW_{33} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.3.54)$$

假定在晕轨道卫星上搭载 X 射线探测器,同时接收 3 颗脉冲星($a=1,2,3$)发射的脉冲,测得 3 个观测脉冲轮廓。将脉冲星 a 的观测轮廓与 SSB 接收的相应标准轮廓做比较,得到两个轮廓的时间延迟和频率偏差为 (τ^a, ζ^a) ,这 6 个观测测量与卫星的 6 维状态量 (x^i, v^i) 的关系构成 XNAV 的 6 维观测方程为(见式(5.3.9))

$$\begin{cases} c\tau^a = \mathbf{n}_0^a \cdot \mathbf{r} + \rho^a(\mathbf{r}) \pm cm^a P_B^a \\ c\zeta^a = \mathbf{n}^a \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{e}_3 \times \mathbf{r}) \end{cases} \quad (5.3.55)$$

式中: ρ 由式(5.3.2)给出; $\mathbf{n}^a = \mathbf{n}_0^a + \nabla \rho^a$; \mathbf{r} 和 $\mathbf{v} + \mathbf{e}_3 \times \mathbf{r}$ 分别为卫星在 BCRS 中的位矢和速度,由于将 BCRS 原点近似取在日—地质心上, \mathbf{r} 和 \mathbf{v} 又分别是卫星在旋转参考系的位矢和速度(上面已经完成观测方程从 BCRS 到旋转参考系的转换)。因为定位精度要求不高,不必考虑参考系转换中的相对论效应。

对上式求变分,得到

$$\begin{cases} c\delta\tau^a = \mathbf{n}^a \cdot \delta\mathbf{r} \\ c\delta\zeta^a = \mathbf{n}^a \cdot (\delta\mathbf{v} + \mathbf{e}_3 \times \delta\mathbf{r}) \end{cases} \quad (5.3.56)$$

观测量误差为同一时刻实际测量值与晕轨道对应值之差,即

$$\delta\tau^a = \tau^a - \tau_h^a, \quad \delta\zeta^a = \zeta^a - \zeta_h^a$$

而 (τ_h^a, ζ_h^a) 由晕轨道状态量 $(\mathbf{r}_h, \mathbf{v}_h)$ 代入式(5.3.55)确定。定义 6 维观测量 $\mathbf{Z} = c[\tau^a \quad \zeta^a]^T$,则上式的矩阵形式为

$$\delta\mathbf{Z}_k = \mathbf{H}\delta\mathbf{X}_k \quad (5.3.57)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} n_1^1 & n_2^1 & n_3^1 & 0 & 0 & 0 \\ n_1^2 & n_2^2 & n_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ n_1^3 & n_2^3 & n_3^3 & 0 & 0 & 0 \\ n_2^1 & -n_1^1 & 0 & n_1^1 & n_2^1 & n_3^1 \\ n_2^2 & -n_1^2 & 0 & n_1^2 & n_2^2 & n_3^2 \\ n_2^3 & -n_1^3 & 0 & n_1^3 & n_2^3 & n_3^3 \end{bmatrix} \quad (5.3.58)$$

6×6 阶观测矩阵 \mathbf{H} 为常矩阵, n_i^a ($a, i = 1, 2, 3$) 是第 p 颗脉冲星方向矢量的 i 分量。

将 6 维观测方程式(5.3.57)和状态方程式(5.3.53)联立,得到离散系统的滤波方程为

$$\begin{cases} \delta\mathbf{Z}_k = \mathbf{H}\delta\mathbf{X}_k + \mathbf{U}_k \\ \delta\mathbf{X}_{k+1} = \Phi_k \delta\mathbf{X}_k + \mathbf{W}_k \end{cases} \quad (5.3.59)$$

U_k 和 W_k 分别是 6 维观测噪声和状态噪声矢量。取 3 颗脉冲星 J0534 + 2100、J1824 - 2452 和 J1939 + 2134 的数据(见表 5.1.1),采用扩展卡尔曼滤波(UKF)方法做仿真计算,结果表明,卫星径向误差能够达到小于 1km,速度误差小于 0.1m/s,如图 5.3.4 所示。

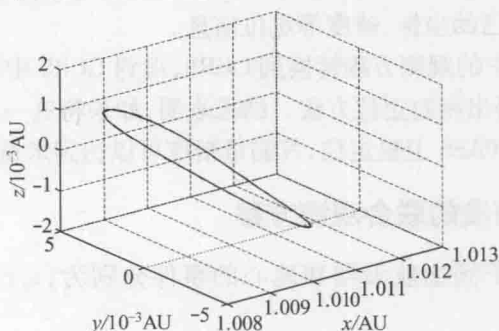


图 5.3.4 日地系第一平动点的晕轨道

5.4 GCRS 中的相对定位模型

X 射线脉冲星自主导航(XNAV)可以用于深空探测、星际航行、人造卫星等不同的航天器,不同的应用情况对导航精度的要求有很大差别。如果应用于地球卫星的定位,由于地面测控站对卫星的测量可以达到较高的精度,将 XNAV 作为辅助导航手段应该具有与地面测控大致接近的测量精度。如果采用以 SSB 为基准的绝对定位方法难以达到这一要求,因为绝对定位不可避免地存在以下的误差:

(1) 标准脉冲轮廓的周期 P_B 具有相当高的精确性和稳定性,可以忽略它的误差。但 SSB 接收脉冲的时间 t_B 并不是直接测量值,而是通过参考时刻 t_{ref} 的标准轮廓相位推算出来的(见式(5.1.7))。当 $t_B - t_{ref}$ 较大时,由于模型误差、 $\varphi(t_{ref})$ 和 $f_P^{(k)}(t_{ref})$ 的误差,必然导致基准时间存在误差 δt_B 。

(2) 地球相对于 SSB 的状态量(r_E, v_E)是通过地球星历得到的,由于星历本身的误差以及随时间的变化导致当前时刻的位置和速度误差为 $\delta r_E, \delta v_E$ 。

(3) 遥远脉冲星的方向矢量不能精确测量,其测量误差 δn 大约在 10^{-4} rad,这是影响 XNAV 定位精度的主要部分。

(4) 遥远脉冲星相对于 SSB 的距离和速度也不可能精确测量,其误差 $\delta D, \delta v_p$ 。

误差(2)、(3)、(4)与当前时刻的脉冲星和地球运动状态有关。

许多文献相继提出了基于脉冲星或强 X 射线源的相对定位方法,试图直接

比较目标卫星与基准卫星的观测轮廓来确定时间延迟,从而得到目标卫星相对于基准卫星的位置。我们认为这种方法有一些缺点,应该直接借鉴卫星导航系统中载波相位差分定位(DGPS)方法,差分定位法是经过实践检验的高精度定位技术,它是将基准站采集的载波相位以及自身运动状态信息发送给用户,用户通过求差解算出自己的坐标、速度等定位信息。

首先将 BCRS 中的观测方程转换到 GCRS,得到 GCRS 中相对于地心的观测方程,在此基础上提出相对定位方法。结果表明,如果将这一方法应用于基于 X 射线脉冲星的 COMPASS 卫星定位,其测量精度可以达到米量级。

5.4.1 地心为基准的联合观测方程

设 BCRS 中光子到达航天器和地心的事件分别为 (t, \mathbf{r}) 和 (t_E, \mathbf{r}_E) , 根据式(5.3.1)可知

$$c(\tilde{t}_B - t) = \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r} + \rho(\mathbf{r})$$

$$c(\tilde{t}_B - t_E) = \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_E + \rho(\mathbf{r}_E)$$

BCRS 中航天器相对于地心的位矢 $\mathbf{x} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_E$, 因为 $\mathbf{r}_E \gg \mathbf{x}$, 可将 $\rho(\mathbf{r})$ 展开成

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}_E + \mathbf{x}) = \rho(\mathbf{r}_E) + \nabla \rho(\mathbf{r}_E) \cdot \mathbf{x}$$

由上面 3 式得到

$$c(t_E - t) = (\mathbf{n}_0 + \nabla \rho(\mathbf{r}_E)) \cdot \mathbf{x} \equiv \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} \quad (5.4.1)$$

$$\nabla \rho(\mathbf{r}_E) = \frac{(\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_E) \mathbf{n}_0 - \mathbf{r}_E}{D} + \frac{R_E(\mathbf{n}_0 + \mathbf{r}_E)}{\mathbf{r}_E + \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_E} + \frac{d}{D} \quad (5.4.2)$$

这是 BCRS 中相对于地心的位置观测方程。

以地心为基准的测量在 GCRS 中实施起来较为方便,所以对上式做相对论变换,建立 GCRS 中的位置和速度观测方程。

设 GCRS 中脉冲星方向矢量为 \mathbf{N}_0 , 航天器位矢为 \mathbf{X} , $T = \text{TCG}$ 是地心坐标时,分别对应于上式中的 $\mathbf{n}_0, \mathbf{x}, t$ 。根据式(3.2.12)和式(3.2.16),精确到 c^{-2} 量级的相对论变换关系为

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} - \frac{1}{2c^2} [(\mathbf{X} \cdot \mathbf{v}_E) \mathbf{v}_E + 2w_E(0) \mathbf{X}] \quad (5.4.3)$$

$$\mathbf{n}_0 = \mathbf{N}_0 - \frac{1}{2c^2} [(\mathbf{N}_0 \cdot \mathbf{v}_E) \mathbf{v}_E + 2w_E(0) \mathbf{N}_0] \quad (5.4.4)$$

$$t = \left[1 - \frac{v_E^2 + 2w_E(0)}{2c^2} \right] T + \frac{\mathbf{v}_E \cdot \mathbf{X}}{c^2} \quad (5.4.5)$$

$$t_E = \left[1 - \frac{v_E^2 + 2w_E(0)}{2c^2} \right] T_E \quad (5.4.6)$$

地心处的外部引力势可近似取为

$$w_E(0) \approx \mu_S / r_E \approx v_E^2$$

将式(5.4.2) ~ 式(5.4.6)代入式(5.4.1), 得到

$$c(T_E - T) = (N_0 + \nabla \rho'(r_E, v_E)) \cdot X \equiv N \cdot X \quad (5.4.7)$$

$$\nabla \rho'(r_E, v_E) = \nabla \rho(r_E) + \frac{v_E}{c} - \frac{1}{2c^2} [2(v_E \cdot N_0) v_E + v_E^2 N_0] \quad (5.4.8)$$

式(5.4.8)右边最后3项反映了GCRS的非惯性系特性($v_E \neq 0$), 式中的 r_E, v_E 可以用GCRS中SSB的位置和速度表示:

$$X_B = -r_E, \quad V_B = -v_E$$

设航天器和地心接收脉冲轮廓的频率为 f 和 f_E , 它们是以TCG度量的(不要与5.3节的符号混淆)。采用与5.3.1节相同的求解方法, 又可得到多普勒速度观测方程。于是有

$$\begin{cases} c(T_E - T) = N \cdot X \\ c(f - f_E)/f_E = N \cdot V \end{cases} \quad (5.4.9)$$

如果取 $\nabla \rho'$ 中较大部分, 则有

$$N = N_0 + \nabla \rho' \approx N_0 + v_E/c \quad (5.4.10)$$

这就是GCRS中相对于地心的位置和速度联合观测方程。

虽然式(5.4.10)不涉及光子到达SSB的时间以及SSB的位置, 但是这里的(T_E, f_E)并不是直接观测值, 不能直接应用该方程为航天器定位。可以设置一颗卫星来代替地心, 作为计时和定位的基准, 也就是下面的相对定位方法。

5.4.2 GCRS 中的相对定位法

图5.4.1是GCRS中的脉冲传播时空图, X射线脉冲星发射光波的同一波

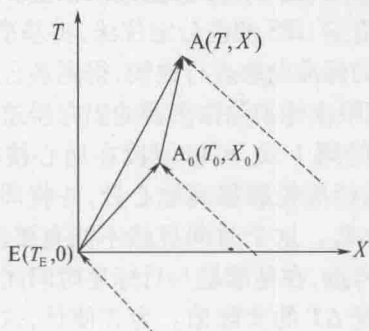


图5.4.1 地心(E)、基准星(A_0)和目标星(A)接收脉冲时空图

阵面沿光锥到达地心 E 和卫星 A_0, A, A_0 作为相对定位的基站(姑且称作基准星)可以选取地球静止卫星也可以是其他卫星,相对于地心的状态量 (X_0, V_0) 通过地面测控站的精确测量获得,它同时探测 3 颗脉冲星就得到 3 个脉冲轮廓(基准轮廓),其峰值对应点的时间和频率分别为 (T_0^a, f_0^a) 。目标卫星 A 的状态量和观测量分别为 (X, V) 和 (T^a, f^a) ,其中 T^p 是观测轮廓峰值对应的时间。

定义目标星 A 与基准星 A_0 的状态量和观测量差值为

$$\begin{cases} \Delta X = X - X_0 \\ \Delta V = V - V_0 \\ \Delta T^a = T^a - T_0^a \\ \Delta \zeta^a = (f^a - f_0^a)/f_E^a \end{cases} \quad (5.4.11)$$

由式(5.4.9)得到 6 维相对定位方程

$$\begin{cases} c\Delta T^a = -N^a \cdot \Delta X \\ c\Delta \zeta^a = -N^a \cdot \Delta V \end{cases} \quad (5.4.12)$$

如果测量出目标星的观测轮廓与基准星的基准轮廓的时延和频偏参量 $(\Delta T^a, \Delta \zeta^a)$,即可由上面的 6 个方程求得状态量差值 $(\Delta X, \Delta V)$,从而算出目标星的 6 维状态量 (X, V) 。

式(5.4.12)中频偏 $\Delta \zeta$ 的计算与绝对定位法相同,是探测器通过叠加光子数序列形成观测轮廓的过程中得到的,这里仅讨论相对定位中时延 ΔT 的计算方法。

首先应该说明,这个时延可以采用比较目标星与基准星的观测轮廓来确定,这也是 Sheikh 等人提出的方法,但是这种方法有如下缺点:(1) 在观测时间较短的情况下,这两个轮廓的信噪比都比较低,直接比较两个“模糊”轮廓将导致时延估计值的误差偏大;(2) 作为导航星座的脉冲星具有相当稳定的标准轮廓,它是长时间观测的结果,采用上述方法没有利用这一特性;(3) 基准星将基准轮廓分别传输到其他目标星上,也增大了测量的工作量。

因此我们认为应该借鉴 GPS 的差分定位法,将基准轮廓和目标星的观测轮廓分别与假想地心接收的标准轮廓进行比较,得到各自的时延后求其差值,这样可以避免上述缺陷,最大限度地消除探测器的固有误差和测量系统误差。

考察式(5.4.12)中的第 1 式,可以假设在地心接收的脉冲轮廓为标准轮廓,相当于将 SSB 接收的标准轮廓移到地心处,并将周期调整为基准轮廓的频率 f_E ,峰值对应的时间为 T_E 。这个时间虽然不能直接测量,但它只是各个卫星计算脉冲到达时间的参考点,在基准星与目标星时间同步的情况下,对不同卫星取同一常值并不影响时延 ΔT 的实际值。为方便计,取 $T_E = 0$ 并以此为参考时间零点,因而卫星接收脉冲时间与它的位置存在以下对应关系:

$$cT = -N \cdot X \quad (T_E = 0) \quad (5.4.13)$$

相对定位的实际测量可如下进行:

由地面测控站精确测量基准星的位置 X_0 , 由上式可知脉冲到达基准星的真实时间为

$$\begin{cases} T_0 = \tau_0 + m_0 P_0 = -N \cdot X_0 / c \\ m_0 = \text{int}(|N \cdot X_0| / \lambda_0) \\ \tau_0 = \hat{\tau}_0 + \delta\tau_0 \end{cases} \quad (5.4.14)$$

这里已经假设 $N \cdot X_0 < 0$ (当 $N \cdot X_0 > 0$ 时做相应改变)。式中的 $\lambda_0 = cT_0$, $0 < \tau_0 < T_0$, m_0 是 $N \cdot X_0$ 对应的整波数, $\hat{\tau}_0$ 是基准轮廓与峰值相位为 0 的标准轮廓的估计时延, $\delta\tau_0$ 是估计值与真实值的偏差。

同理, 设脉冲到达目标星的真实时间为

$$\begin{cases} T = \tau + mP_0 = -N \cdot X / c \\ m = \text{int}(|N \cdot X_{\text{pred}}| / \lambda_0) \\ \tau = \hat{\tau} + \delta\tau \end{cases} \quad (5.4.15)$$

这里也假设了 $N \cdot X < 0$, $0 < \tau < T_0$ 。因毫秒脉冲星的波长 $\lambda_0 > 10^5 \text{ m}$, 在正常情况下整波数 m 可根据卫星位置的预报值 X_{pred} 得到 (否则的话应采用模糊度搜索专门程序计算之)。将目标卫星的观测轮廓周期也调整为 P_0 , 比较观测轮廓与峰值相位为 0、周期为 P_0 的标准轮廓, 得到二者的时延 $\hat{\tau}$, 真实值与它的差值为 $\delta\tau$ 。

由上面 2 式得

$$\begin{aligned} \Delta T &= (\hat{\tau} - \hat{\tau}_0) + (m - m_0)P_0 + (\delta\tau - \delta\tau_0) \\ &\equiv \Delta\hat{\tau} + \Delta m P_0 + \Delta(\delta\tau) \end{aligned} \quad (5.4.16)$$

如果 $\Delta(\delta\tau) = 0$, 就可以将式 (5.4.16) 代入式 (5.4.13) 求出目标卫星的位置矢量。也就是说, 按照

$$c\Delta\hat{\tau} + \Delta m \lambda_0 = -N \cdot \Delta X \quad (5.4.17)$$

求解卫星位置, 其位置测量偏差为 $c\Delta(\delta\tau)$ 。

相对定位的测量误差并不取决于 $\delta\tau_0$ 和 $\delta\tau$ 的大小, 而是由它们的差值 $\Delta(\delta\tau)$ 决定, 这也是相对定位相对于绝对定位的优越性。条件 $\Delta(\delta\tau) = 0$ 实际上表示不同卫星的时延测量误差相同, 这除了要求基准星与目标星对观测轮廓的叠加运算以及时延计算方法完全相同外, 还要求基准轮廓与观测轮廓的形状相同, 一般说来这是可以满足的。

5.4.3 地球静止卫星为基站的相对定位

下面讨论以地球静止卫星为基站的相对定位方法, 由于静止卫星的稳定性

较好且易于测量,也许这是一个较好的选择。

如图 5.4.2 所示,设基准卫星 A_0 为地球静止卫星,位于地球赤道面的圆周轨道,其半径和角速度分别为

$$R = 42164.18\text{km}, \quad \Omega = 7.292115 \times 10^{-5}\text{rad/s}$$

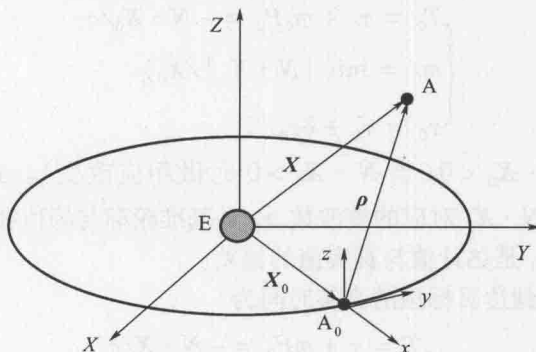


图 5.4.2 卫星在地心系 $\{X, Y, Z\}$ 和站心系 $\{x, y, z\}$ 的位置关系

以基站为原点、地球自转轴为 z 轴、地心指向基站方向为 x 轴建立站心坐标系 $\{x, y, z\} = \{x^1, x^2, x^3\}$, 则卫星 A 在站心系中的位矢 $\rho = (x^1, x^2, x^3)$ 和速度 $\dot{\rho} = (\dot{x}^1, \dot{x}^2, \dot{x}^3)$ 与 GCRS 中对应矢量的关系是

$$\rho = \Delta X, \quad \dot{\rho} = \Delta V - \Omega \times \Delta X$$

将上式代入式(5.4.11), 得到 6 维观测方程

$$\begin{cases} c\Delta T^a = -N^a \cdot \rho \\ c\Delta \zeta^a = -N^a \cdot (\dot{\rho} + \omega \times \rho) \end{cases} \quad (5.4.18)$$

其矩阵形式为

$$Z = HY \quad (5.4.19)$$

式中: 6 维状态量、6 维观测量和 6×6 阶观测矩阵分别为

$$Y = [\rho \quad \dot{\rho}]^T = [x^1 \quad x^2 \quad x^3 \quad \dot{x}^1 \quad \dot{x}^2 \quad \dot{x}^3]^T \quad (5.4.20)$$

$$Z = c[\Delta T^1 \quad \Delta T^2 \quad \Delta T^3 \quad \Delta \zeta^1 \quad \Delta \zeta^2 \quad \Delta \zeta^3]^T \quad (5.4.21)$$

$$H = - \begin{bmatrix} N_1^1 & N_1^2 & N_1^3 & 0 & 0 & 0 \\ N_2^1 & N_2^2 & N_2^3 & 0 & 0 & 0 \\ N_3^1 & N_3^2 & N_3^3 & 0 & 0 & 0 \\ N_2^1 \Omega & -N_1^1 \Omega & 0 & N_1^1 & N_2^1 & N_3^1 \\ N_2^2 \Omega & -N_1^2 \Omega & 0 & N_1^2 & N_2^2 & N_3^2 \\ N_2^3 \Omega & -N_1^3 \Omega & 0 & N_1^3 & N_2^3 & N_3^3 \end{bmatrix} \quad (5.4.22)$$

式中: N_i^p 为第 p 颗脉冲星方向矢量的 i 分量 ($i, p = 1, 2, 3$)。由于观测矩阵为常矩阵, 观测方程是一组线性方程。

设位置测量精度在米量级, 忽略地球自转等因素产生的高阶小量, 卫星在站心系中的运动方程为

$$\begin{cases} \ddot{\boldsymbol{\rho}} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{a}(\boldsymbol{\rho}) \\ \mathbf{a}(\boldsymbol{\rho}) = -\Omega^2 \left[\left(\frac{R}{r} \right)^3 \mathbf{r} - (x^1 + R)\mathbf{e}_1 - x^2 \mathbf{e}_2 \right] + \mathbf{a}_p(\boldsymbol{\rho}) \end{cases} \quad (5.4.23)$$

式中: $\mathbf{r} = (x^1 + R, x^2, x^3)$; $\mathbf{a}_p = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_G + \mathbf{a}_{1P}$ 为地球多极矩、日月引力摄动和太阳光压产生的摄动加速度, 由于相对论效应导致卫星位置偏差约为厘米量级, 加速度的相对论修正可以忽略 (见 3.4.6 节)。

对上式求变分得到

$$\delta \ddot{\boldsymbol{\rho}} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \delta \dot{\boldsymbol{\rho}} = \nabla_{\boldsymbol{\rho}} \mathbf{a}(\boldsymbol{\rho}_{\text{tar}}) \cdot \delta \boldsymbol{\rho} \quad (5.4.24)$$

其矩阵形式为

$$\delta \dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{M}(t) \delta \mathbf{Y} \quad (5.4.25)$$

式中: $\delta \mathbf{Y} = [\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_{\text{tar}}, \dot{\boldsymbol{\rho}} - \dot{\boldsymbol{\rho}}_{\text{tar}}]^T$ 为任意时刻卫星实际轨道状态量 $(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}})$ 与目标轨道 $(\boldsymbol{\rho}_{\text{tar}}, \dot{\boldsymbol{\rho}}_{\text{tar}})$ 的差值。将卫星状态离散化 $\mathbf{Y}(t) \rightarrow \mathbf{Y}(t_k)$, 时间步长为 $h = t_{k+1} - t_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), 根据上式得到卫星的 (误差) 状态方程

$$\delta \mathbf{Y}_{k+1} = \delta \mathbf{Y}_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{tM(t)} dt = \boldsymbol{\Phi}_k \delta \mathbf{Y}_k \quad (5.4.26)$$

其中

$$\boldsymbol{\Phi}_k = \begin{bmatrix} 1 + 0.5h^2 a_1^1 & 0.5h^2 a_2^1 & 0.5h^2 a_3^1 & h & 0 & 0 \\ 0.5h^2 a_1^2 & 1 + 0.5h^2 a_2^2 & 0.5h^2 a_3^2 & 0 & h & 0 \\ 0.5h^2 a_1^3 & 0.5h^2 a_2^3 & 1 + 0.5h^2 a_3^3 & 0 & 0 & h \\ ha_1^1 & ha_2^1 & ha_3^1 & 1 & 2h\Omega & 0 \\ ha_1^2 & ha_2^2 & ha_3^2 & -2h\Omega & 1 & 0 \\ ha_1^3 & ha_2^3 & ha_3^3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.4.27)$$

式中: 符号 $a_j^i = \left. \frac{\partial a^i}{\partial x^j} \right|_{\boldsymbol{\rho}_{\text{tar}}(t_k)}$ ($i, j = 1, 2, 3$) 为加速度分量的导数, 取目标轨道上在 t_k 时刻的值。

根据式 (5.4.19) 和式 (5.4.26), 得到以地球静止卫星为基站的卫星定位滤

$$\begin{cases} \delta Z_k = H\delta Y_k + U_k \\ \delta Y_{k+1} = \Phi_k \delta Y_k + W_k \end{cases} \quad (5.4.28)$$

式中: U_k 和 W_k 分别为 6 维观测噪声和状态噪声矢量。采用与 5.3.6 节相同的方法做仿真计算的结果表明, 可以将卫星的径向误差控制在米量级。

综上所述, 得到以下结论:

无论是 BCRS 中相对于 SSB 的观测方程式(5.3.9)还是 GCRS 中相对于地心的观测方程式(5.4.12), 在理论上具有相同的精度。但由于前者需要的许多天文观测数据具有不确定性, 导致测量精度难以提高。而这些不确定性对后者的影响较小, 并且由于相对定位的基本方程式可以看成线性的, 为观测方程与卫星运动方程联立求解提供了很好的基础。其次, 基准星和目标星是对相同脉冲星进行探测和数据处理后进行比较, 可以有效地消除探测器系统误差以及计算误差等。因此基于 X 射线脉冲星的地球卫星相对定位方法的定位精度较高, 这与卫星导航的差分定位情况类似。如果选取 2 颗卫星(例如地球静止卫星)作为基准星, 即可覆盖全球所有卫星。

但是, 相对定位方法必须在基准星与目标星间建立星间链路, 基准星实时地向其他卫星单向传输信号, 告知自身的观测量和状态量。除此之外, 基准星与目标星必须保证在同一基准时间(对应于 T_E)同步测量脉冲星信号, 可分为两类情况分别处理: 如果基准星与目标星属于同一时间同步系统(例如 COMPASS 卫星群), 它们可以在设定的同一时间(取相同的 T_E)进行测量; 如果二者不存在时间同步联系(例如地球静止卫星为探月飞船定位), 基准星在测量的同时向目标星发送载波信号, 待测星接到信号后根据载波信号传播时间确定时间参考零点, 也可保证与基准星同步测量。

参 考 文 献

- [1] 房建成, 宁晓琳, 田玉龙. 航天器自主天文导航原理与方法. 北京: 国防工业出版社, 2006.
- [2] 费保俊, 孙维瑾, 潘高田, 等. X 射线脉冲星自主导航的光子到达时间转换. 空间科学学报, 2010, 30(1).
- [3] 费保俊, 姚国政, 杜健, 等. X 射线脉冲星自主导航的脉冲轮廓和联合观测方程. 中国科学: 物理学力学天文学, 2010, 40(5).
- [4] 费保俊, 潘高田, 姚国政, 等. X 射线脉冲星自主导航中脉冲轮廓的频偏和时延算法. 测绘学报, 2011, 40(Sup).
- [5] 李宗伟, 肖兴华. 天体物理学. 北京: 高等教育出版社, 2003.
- [6] 帅平, 李明, 陈绍龙, 等. X 射线脉冲星导航系统原理与方法. 北京: 中国宇航出版社, 2009.
- [7] 王绶琯, 周又元. X 射线天体物理学. 北京: 科学出版社, 1999.
- [8] 徐仁新. 天体物理导论. 北京: 北京大学出版社, 2006.

- [9] 高洁, 萧耐园. 毫秒脉冲星在天体测量中的应用. 天文学进展, 1992, 10(3).
- [10] 刘甲全, 须重明. 毫秒脉冲星定时观测中的高阶相对论效应. 天文学报, 1989, 30(3).
- [11] 孙维瑾, 费保俊, 肖昱, 等. X 射线脉冲星自主导航的光传播时间方程. 天文学报, 2008, 49(2).
- [12] 杨廷高, 南仁东, 金乘进, 等. 脉冲星在空间飞行器定位中的应用. 天文学进展, 2007, 25(3).
- [13] 杨廷高. X 射线脉冲星脉冲到达航天器时间测量. 空间科学学报, 2008, 28(4).
- [14] 姚国政, 费保俊, 肖昱. 关于 X 射线脉冲星自主导航的位置观测方程. 天文学报, 2012, 53(2).
- [15] 赵露华, 费保俊, 肖昱, 等. 基于 X 射线脉冲星的夸父 A 卫星自主导航和轨道控制. 航天控制, 2012, 30(3).
- [16] 赵铭, 黄天衣. 脉冲星计时数据的天体测量解析. 中国科学: 物理学力学天文学, 2009, 39(11).
- [17] Backer D C, Hellings R W. Pulsar timing and general relativity. *Ann Rev Astrophys*, 1986, 24(1).
- [18] Downs G S. Interplanetary navigation using pulsating radio sources. NASA Technical Report, 1974, 32.
- [19] Emadzadeh A A, Golshan A R, Speyer J L. Consistent estimation of pulse delay for X-ray pulsar based relative navigation. Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference, Shanghai, 2009.
- [20] Emadzadeh A A, Speyer J L. On modeling and pulse phase estimation of X-ray pulsars. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(9).
- [21] Emadzadeh A A, Speyer J L. X-ray pulsar-based relative navigation using epoch folding. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2011, 47(4).
- [22] Ge M Y, Lu F J, Qu J L, et al. X-ray phase-resolved spectroscopy of PSRs B0531 + 21, B1509 - 58, and B0540 - 69 with RXTE. *ApJS*, 2012, 199(2).
- [23] Graven P H, Collins J T, Sheikh S I, et al. Spacecraft navigation using X-ray pulsars. 7th International ESA Conference on Guidance, Navigation & Control Systems, 2008.
- [24] Hanson J, Sheikh S I, Graven P, et al. Noise analysis for X-ray navigation systems. Position, Location and Navigation Symposium, IEEE/ION, Monterey, 2008.
- [25] He Z N, Fei B J, Yao G Z, et al. United Estimation of Time Delay and Frequency Drift in XNAV. *AMM*, 2014, 565.
- [26] Hobbs G, Lorimer D R, Lyne A G, Kramer M. A statistical study of 233 pulsar proper motions. *Mon Not Roy Astron Soc*, 2005, 360.
- [27] Larsson S. Parameter estimation in epoch folding analysis. *Astron Astrophys Supp Ser*, 1996, 117.
- [28] Lyne A G, Smith F G. Pulsar astronomy. Cambridge University Press, 2006.
- [29] Petit G, Tavella P. Pulsars and time scales. *Astron Astrophys*, 1996, 308.
- [30] Pines D J, et al. X-ray source-based navigation for autonomous position determination program. DARPA/TTO, 571 - 218 - 4339, 2004.
- [31] Sala J, Urruela A, Villares X, et al. Feasibility study for a spacecraft navigation system relying on pulsar timing information. ARIADNA Study Report, 2004, 3.
- [32] Sheikh S I. The use of variable celestial X-ray sources for spacecraft navigation. Doctor Dissertation, University of Maryland, 2005.
- [33] Sheikh S I, Darryll J P. Spacecraft navigation using X-ray pulsars. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 2006, 29(1).
- [34] Sheikh S I, Ray P, Weiner K, et al. Relative navigation of spacecraft utilizing bright, a periodic celestial sources. ION 63rd Annual Meeting, Cambridge, Massachusetts, 2007.
- [35] Sun W J, Fei B J, Xiao Y, et al. The time equation of light propagation in XNAV. *ChA&A*, 2008, 32(4).

- [36] Woodfork D W. The use of X-ray pulsars for aiding GPS satellite orbit determination. AFIT/GA/ENG/05-01, 2005.
- [37] Xu X B ,Wu X J. 2003. Mean pulse analysis and spectral character study of pulsar PSR B2111 +46. Sci Chin(G) , 2003, 46(1)
- [38] Yao G Z,Fei B J,Xiao Y. On the equation of position measurement of XNAV. ChA&A, 2012,36(4).

第6章 相对论定位系统及其应用前景

无论是卫星导航还是现在正在研究中的 X 射线脉冲星导航 (XNAV), 都是测量光波从导航星座 (卫星或脉冲星) 到达观测者的传播时间即光子到达时间 (TOA), 由于光速不变性, TOA 等价于导航星座到观测者的距离。我们姑且将这种导航方法称作 TOA 定位法。从纯粹广义相对论的观点来看, TOA 定位法中测量的系统时间 (如 BDT 或 GPST) 属于坐标时间。在考虑引力作用的情况下, 坐标时间并不满足光速不变性, 于是我们将引力对测量时间的影响 (相对论效应) 作为一种修正加进去, 因此 TOA 定位法实际上是一种半经典理论, 是经典力学与相对论的混合体。

原则上说, 直接在相对论框架内建立导航理论是完全可行的, 有不少学者在这方面做了深入探讨。2002 年, Rovelli 在深入研究卫星导航理论过程中, 首先将相对论测量理论引入导航系统, 提出 GPS 中的可观测量是指固有量而并非坐标量, 认为应该借鉴相对论天体物理的研究方法, 在 4 维零标架中讨论光传播问题; Blagojevic 随后建立了一种共轭零标架, 将对应坐标称为 GPS 典型坐标; Coll 在深入研究中将这一方法系统化, 提出 4 个发射体的固有时间构成 4 维时空的光坐标或发射坐标, 可以为任意观测者定位导航。由此建立起来的理论体系称为相对论定位系统 (Relativistic Positioning System, RPS), 它是以相对论测量理论为基础的一种全新的导航方法。

虽然这部分内容属于纯理论探讨, 还没有在实际的导航中得到应用。但笔者认为, RPS 在理论上是完美的, 特别有可能在脉冲星导航等深空导航领域得到实际应用, 进入实验研究是迟早的事。有鉴于此, 我们对国外 RPS 的研究简单概述, 有兴趣的读者可参阅有关文献。

为叙述方便, 本章采用 $c=1$ 的自然单位制, 即时间理解为通常时间的 c 倍, 量纲为长度, 速度是以 c 度量的无量纲物理量, 也就是做了如下替换 $t \rightarrow ct$, $v \rightarrow v/c$ 。

6.1 相对论定位系统基本原理

6.1.1 正交标架与零标架

如 2.3.4 节所述, 局域惯性系中的时空是平直的闵氏时空, 可以建立整体的

闵氏正交标架。设4维平直时空的时空坐标系为 $\{x^\mu | \mu=0,1,2,3\}$, e_μ 和 e^μ 为标架的基矢量和共轭基矢量。在自然单位制下的闵氏线元和度规和分别为

$$d\tau^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \quad (6.1.1)$$

$$\eta_{\mu\nu} = \langle e_\mu, e_\nu \rangle = \eta^{\mu\nu} = \langle e^\mu, e^\nu \rangle \quad (6.1.2)$$

该标架的特点是时间和空间概念比较清楚。

为了讨论问题的方便,当然也可以引入其他的标架。例如,在广义相对论中讨论引力辐射或电磁波传播时,常常采用 Newman-Penrose 标架 $\{\bar{e}_a | a=1,2,3,4\}$,它与闵氏标架 $\{e_\mu | \mu=0,1,2,3\}$ 的关系定义为

$$\begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_3 \\ \bar{e}_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

其中, $i = \sqrt{-1}$ 为虚数单位。利用式(6.1.2),求得基矢 \bar{e}_a 下的度规张量

$$g_{11} = \langle \bar{e}_1, \bar{e}_1 \rangle = \frac{1}{2} \langle e_0 + e_1, e_0 + e_1 \rangle = \frac{1}{2} [\langle e_0, e_0 \rangle + \langle e_1, e_1 \rangle] = 0, \dots$$

$$g_{ab} = \langle \bar{e}_a, \bar{e}_b \rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

上式有一个特点就是对角元素均为0:

$$g_{aa} = 0 \quad (a = 1, 2, 3, 4)$$

这就是下面要讨论的零标架。

对于任意坐标系 $\{X^a | a=1,2,3,4\}$ 及其标架 $\{\omega_a\}$,其度规 g_{ab} 与闵氏度规 $\eta_{\mu\nu}$ 的关系为(见式(2.3.13))

$$g_{ab} = \langle \omega_a, \omega_b \rangle = \eta_{\mu\nu} E_a^\mu E_b^\nu \quad (6.1.3)$$

式中: $E_a^\mu = \partial x^\mu / \partial X^a$ 为坐标变换系数。根据两个坐标系的基矢量关系

$$\omega_a = \frac{\partial}{\partial X^a} = \frac{\partial x^\mu}{\partial X^a} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = E_a^\mu e_\mu \quad (6.1.4)$$

可知 E_a^μ 表示 $\{X^a\}$ 的基矢量 ω_a 在 $\{x^\mu\}$ 的基矢量 e_μ 上的分量(投影),有时也把 $(E_a^\mu | \mu=0,1,2,3)$ 称作基矢量。根据式(6.1.3),可知坐标 $\{X^a\}$ 下的度规张量为

$$g_{ab} = E_a^0 E_b^0 - (E_a^1 E_b^1 + E_a^2 E_b^2 + E_a^3 E_b^3) \quad (6.1.5)$$

如果度规张量的对角元素 $g_{aa}=0$, 则有

$$(E_a^0)^2 = (E_a^1)^2 + (E_a^2)^2 + (E_a^3)^2 = \omega_a \cdot \omega_a \quad (6.1.6)$$

其中的 3 维欧氏空间矢量

$$\omega_a = E_a^1 e_1 + E_a^2 e_2 + E_a^3 e_3 = E_a^i e_i \quad (6.1.7)$$

是 4 维基矢量 ω_a 在 3 维欧氏空间的投影。这表明每一个基矢量 ω_a 在时间轴上分量的量值 $|E_a^0|$ 与 3 维欧氏空间上的分量值 $|\omega_a|$ 相同, 所以新基矢必定位于坐标原点的光锥上 (注意光锥是绝对的, 与坐标系无关), 根据矢量的分类 (见式 (1.2.27)), 新基矢必定是类光矢量或零矢量。

同理, 根据度规张量的逆变分量与闵氏度规的关系

$$g^{ab} = \langle \omega^a, \omega^b \rangle = \eta^{\mu\nu} E_\mu^a E_\nu^b \quad (6.1.8)$$

以及共轭基矢量之间的关系

$$\omega^a = E_\mu^a e^\mu \quad (6.1.9)$$

可以证明, $g^{aa}=0$ 表示每一个新共轭基矢 ω^a 在闵氏标架的共轭时间轴 e^0 上的分量值与 3 维欧氏空间的分量值相同, 新共轭基矢量是零矢量。

综合上面的讨论, 将满足

$$g_{aa} = 0 \quad (6.1.10a)$$

或

$$g^{aa} = 0 \quad (6.1.10b)$$

的标架称作零标架或共轭零标架, 其含义为标架的基矢量或共轭基矢量是闵氏空间的零矢量。注意: 零标架不一定是共轭零标架, 反之亦然。在 $g_{aa}=0$ 的零标架中, 线元的一般形式为

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= g_{ab} dX^a dX^b \\ &= 2(g_{12} dX^1 dX^2 + g_{13} dX^1 dX^3 + g_{14} dX^1 dX^4 \\ &\quad + g_{23} dX^2 dX^3 + g_{24} dX^2 dX^4 + g_{34} dX^3 dX^4) \end{aligned} \quad (6.1.11)$$

它具有正定和对称形式, 指标 a, b 没有类时和类空之分。同理可得 $g^{aa}=0$ 的线元的一般形式。

我们来看一个 3 维时空零标架的例子, 如图 6.1.1 所示。设新标架基矢量 $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ 与 3 维正交标架基矢量的关系为

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \quad (6.1.12)$$

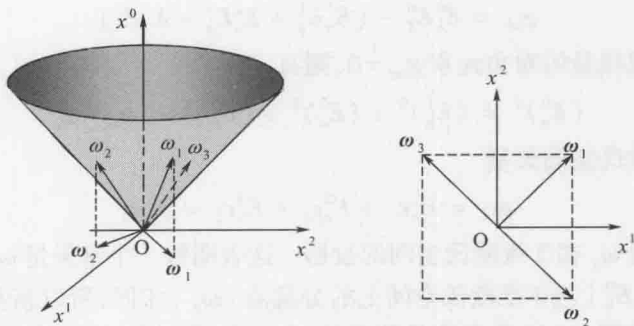


图 6.1.1 3 维闵氏空间的零标架及其在 2 维欧氏空间的投影

利用式(6.1.2)、式(6.1.3)可得该标架下的度规

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = 0$$

所以 $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ 构成一个 3 维零标架。从图中可以看出,零标架的 3 个基矢量均位于原点的光锥上,它们在 2 维欧氏空间 $\{x^1, x^2\}$ 上的投影分别是

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \quad (6.1.13)$$

长度均为 $\sqrt{2}/2$, 等于在时间轴上的投影。

零标架的固有性质为研究光波的传播特性提供了一个非常有效的工具,下面讨论的相对论定位系统就是基于零标架的一种新的导航方法。

6.1.2 零标架中的光坐标

如图 6.1.2 所示,设发射体(导航星座)在闵氏空间的世界线为 $\gamma_a(\tau^a)$ ($a=1,2,3,4$), τ^a 为发射体 a 的固有时。在运动过程中发射体不断沿自身光锥发射光波,当观测者接收到 4 个发射体的光波时,表明发射点 $P_a(x^a)$ 必定位于接收点 $P(x)$ 的过去光锥上,或者说接收点必定是 4 个发射点将来光锥的交点。由于沿光锥的时空间隔为 0,即 PP_a 的闵氏长度为 0,有

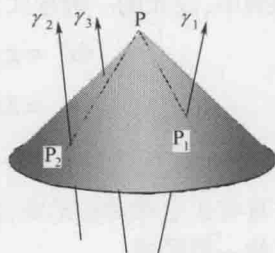


图 6.1.2 发射体的世界线与观测者的过去光锥

$$\begin{aligned} 0 &= \eta_{\mu\nu} (x^\mu - x^{a\mu}) (x^\nu - x^{a\nu}) \\ &= \eta_{\mu\nu} x^{a\mu} x^{a\nu} - 2\eta_{\mu\nu} x^{a\mu} x^\nu + \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \\ &= \langle x^a, x^a \rangle - 2\langle x^a, x \rangle + \langle x, x \rangle \end{aligned} \quad (6.1.14)$$

当发射点坐标($x^{a\mu}$)已知时,由上面4式($a=1,2,3,4$)可确定接收点的坐标(x^μ),这实际上就是卫星导航的基本原理(见式(4.1.2))。

现在,假设发射体的3维速度 v^a 为常量,则4维闵氏速度也是常量:

$$u^{a\mu} = \frac{dx^{a\mu}}{d\tau^a} = \gamma^a(1, v^{ai}) \quad \left(\gamma^a = \frac{1}{\sqrt{1 - (v^a)^2}} \right) \quad (6.1.15)$$

积分得

$$x^{a\mu} = x^{a\mu}(0) + u^{a\mu} \tau^a \quad (6.1.16)$$

注意式中的“0”是指 $\tau^a=0$,即 $x^{a\mu}(0)$ 表示发射体 a 在 $\tau^a=0$ 时的4维初始坐标。将式(6.1.16)代入式(6.1.14)并利用闵氏速度内积

$$\langle u_a, u_a \rangle = \eta_{\mu\nu} u_a^\mu u_a^\nu = 1$$

时空间隔变成

$$(\tau^a)^2 - 2\tau^a \langle u^a, (x - x^a(0)) \rangle + \langle (x - x^a(0)), (x - x^a(0)) \rangle = 0$$

定义观测者相对于发射体初始位置的4维位移矢量

$$\xi^a = x - x^a(0) \quad (\xi^{a\mu} = x^\mu - x^{a\mu}(0)) \quad (6.1.17)$$

则有

$$(\tau^a)^2 - 2\tau^a \langle u^a, \xi^a \rangle + \langle \xi^a, \xi^a \rangle = 0 \quad (6.1.18)$$

由此解出

$$\tau^a = \langle u^a, \xi^a \rangle - \sqrt{\langle u^a, \xi^a \rangle^2 - \langle \xi^a, \xi^a \rangle} \quad (6.1.19)$$

这里已经舍去根号前取“+”号的另一解,因为它对应于发射体世界线与接收点的将来光锥相交,与所设条件不符。如果发射体的速度 $u^{a\mu}$ 以及初始坐标 $x^{a\mu}(0)$ 为已知量,式(6.1.19)给出发射体的固有时与观测者坐标的关系。

必须指出:一般说来,4个发射体的初始坐标($x^{a\mu}(0)$)不可能均为0,这里以 ξ_a^μ 为观测者的坐标具有一般性。在一些文献中令 $x^{a\mu}(0)=0$ 只是为了讨论方便,没有实际应用价值。注意 $\xi^{a\mu}$ 虽然有16个分量,但它只含4个未知量 x^μ 。

式(6.1.19)表明发射体的固有时是观测者坐标的函数

$$\tau^a = \tau^a(\xi^{a\mu}) \quad (a=1,2,3,4)$$

进一步将它当成一种坐标变换,只要变换矩阵的行列式不为0,则

$$\xi^{a\mu} = \xi^{a\mu}(\tau^a) \quad (\mu=0,1,2,3)$$

故4个发射体的固有时(τ^1, \dots, τ^4)可以唯一确定观测者的4个时空坐标(x^0, \dots, x^3)。因此可以将4个发射体的固有时($\tau^a | a=1,2,3,4$)当成观测者坐标,称为光坐标(light coordinates)或发射坐标(emission coordinates)。

既然光坐标构成坐标系,就应该有相应的标架和度规,下面证明光坐标对应

的标架正是零标架。将式(6.1.19)对坐标 $dx^\mu = d\xi^{a\mu}$ 微分,即

$$d\tau^a = \left(u_\mu^a - \frac{\langle u^a, \xi^a \rangle u_\mu^a - \xi_\mu^a}{\sqrt{\langle u^a, \xi^a \rangle^2 - \langle \xi^a, \xi^a \rangle}} \right) dx^\mu \quad (6.1.20)$$

式中的协变分量

$$\begin{cases} u_\mu^a = \eta_{\mu\nu} u^{a\nu} = \gamma^a (1, -v^{ai}) \\ \xi_\mu^a = \eta_{\mu\nu} \xi^{a\nu} = (\xi^{a0}, -\xi^{ai}) \end{cases} \quad (6.1.21)$$

$\{\tau^a\}$ 与 $\{x^\mu\}$ 的变换系数为

$$E_\mu^a = \frac{\partial \tau^a}{\partial x^\mu} = u_\mu^a - \frac{\langle u^a, \xi^a \rangle u_\mu^a - \xi_\mu^a}{\sqrt{\langle u^a, \xi^a \rangle^2 - \langle \xi^a, \xi^a \rangle}} \quad (6.1.22)$$

由式(6.1.8),不难求出度规张量的对角元素

$$g^{aa} = \eta^{\mu\nu} E_\mu^a E_\nu^a = 0 \quad (a = 1, 2, 3, 4) \quad (6.1.23)$$

因此发射坐标 $\{\tau^a\}$ 构成零标架,其线元为

$$g_{ab} d\tau^a d\tau^b = g_{ab} E_\mu^a E_\nu^b dx^\mu dx^\nu = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (6.1.24)$$

显然,式(6.1.19)也可表示成

$$\tau^a = \langle E^a, \xi^a \rangle = E_\mu^a \xi^{a\mu} \quad (6.1.25)$$

如果4个发射体的速度 $\mathbf{v}_a = 0, u_a^\mu = (1, 0, 0, 0)$, 则有

$$\tau^a = E_\mu^a \xi^{a\mu} = \xi^{a0} - |\xi^a| \quad (\mathbf{v}^a = 0) \quad (6.1.26)$$

$|\xi^a| = |\mathbf{x} - \mathbf{x}^a(0)| = |\mathbf{x} - \mathbf{x}^a|$ 是航天器相对于发射体的空间距离。

现在我们看到,所谓相对论定位系统,其实质是以发射体(导航星座)的固有时间即4个光坐标 τ^a 而不是16个时空坐标 $x^{a\mu}$ 来确定观测者的运动状态 x^μ , 但前提是4个发射体的速度为已知常量。这4个光坐标是零标架的4个分量,任意观测者的运动状态可以唯一地由这4个坐标所确定。

6.1.3 零标架与观测者的关系

仔细考察零标架的基矢量表达式(6.1.22),可以看出它并不是固定的常量,除了与发射体的速度和初始位置有关外,还与观测者本身的状态有关。一般说来,对于不同时空点的观测者,零标架是变化的。下面通过分析 Rovelli 零标架和共轭零标架做具体讨论。

Rovelli 等人在深入研究 GPS 测量理论的过程中,于2001年引入了一种实的零标架 $\{\varepsilon_a\}$, 定义它与闵氏标架 $\{e_\mu\}$ 的关系为

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{3} & 1 & -1 & -1 \\ \sqrt{3} & -1 & 1 & -1 \\ \sqrt{3} & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

在此标架下的度规张量 (Rovelli 度规) 为

$$g_{ab} = \langle \varepsilon_a, \varepsilon_b \rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

由于度规矩阵的对角元素 $g_{aa} = 0$, 故 Rovelli 标架是零标架。但是, 由度规矩阵的行列式 $\det(g_{ab}) = -3$, 可求得逆变分量为

$$g^{ab} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

它表示 Rovelli 零标架并非共轭零标架。

在此基础上, Blagojevic 等人进一步引入一个新的标架, 它是用共轭基矢来定义的。新基矢 $\{\omega^a\}$ 与闵氏共轭基矢 $\{e^\mu\}$ 的关系是

$$\omega^a = A_\mu^a e^\mu \quad (a = 1, 2, 3, 4) \quad (6.1.27)$$

$$A_\mu^a = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{3} & 1 & -1 & -1 \\ \sqrt{3} & -1 & 1 & -1 \\ \sqrt{3} & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.1.28)$$

由此求得度规的逆变分量

$$g^{ab} = \langle \omega^a, \omega^b \rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.1.29)$$

将此标架 $\{\omega^a\}$ 称作 Rovelli 共轭零标架。

注意到正交标架共轭基矢量与基矢量的关系

$$e^i = \eta^{ij} e_j = -e_i$$

由式(6.1.28), 可得新标架共轭基矢量在3维欧氏空间上的投影为

$$\omega^a = A_i^a e^i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \quad (6.1.30)$$

如图6.1.3所示, 3维欧氏空间的4个矢量 $\omega^1, \omega^2, \omega^3, \dots$ 的长度均为 $\sqrt{3}/2$ 。

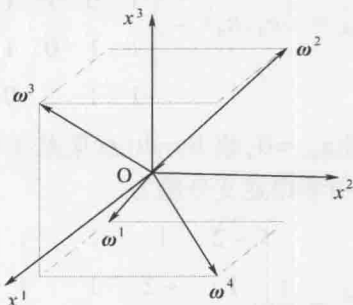


图 6.1.3 Rovelli 共轭零标架在3维欧氏空间的投影

由式(6.1.22)确定的零标架是一般表达式, 假定它与式(6.1.28)相同, 并假设发射体的初始坐标均为0, 即

$$E_\mu^a = A_\mu^a, \quad x^{a\mu} = 0, \quad (a = 1, 2, 3, 4) \quad (6.1.31)$$

在上式两边对 x 作内积, 表示将观测者的时空坐标投影到零标架上, 得到

$$\langle E^a, x \rangle = \langle A^a, x \rangle \quad (6.1.32)$$

这4个方程的具体形式为

$$\langle u^a, x \rangle - \sqrt{\langle u^a, x \rangle^2 - \langle x, x \rangle} = \begin{cases} (\sqrt{3}x^0 + x^1 + x^2 + x^3)/2 & (a = 1) \\ (\sqrt{3}x^0 + x^1 - x^2 - x^3)/2 & (a = 2) \\ (\sqrt{3}x^0 - x^1 + x^2 - x^3)/2 & (a = 3) \\ (\sqrt{3}x^0 - x^1 - x^2 + x^3)/2 & (a = 4) \end{cases} \quad (6.1.33)$$

可见, 如果发射体在发射信号时的4维速度($u_a \mid a = 1, 2, 3, 4$)为已知量, 由此即可解出观测者接收信号时的4个时空坐标($x^\mu \mid \mu = 0, 1, 2, 3$)。

考虑一个简单的例子。假设4颗发射体的3维速度分别为

$$v^a = \begin{cases} v \hat{v}^a & (a = 1, 2) \\ w \hat{w}^a & (a = 3, 4) \end{cases}$$

$$\hat{v}^a = \frac{2}{\sqrt{3}} \omega^a$$

式中, ω^a 由式(6.1.27)定义; \hat{v}^a 为速度单位矢量, 其方向与图 6.1.3 中 ω^a 方向相同。发射体的 4 维速度协变分量分别为

$$u_\mu^a = \gamma^a(1, -v^a) = \begin{cases} \gamma_v \left(1, \frac{v}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) \right) & (a=1) \\ \gamma_v \left(1, \frac{v}{\sqrt{3}}(1, -1, -1) \right) & (a=2) \\ \gamma_w \left(1, \frac{w}{\sqrt{3}}(-1, 1, -1) \right) & (a=3) \\ \gamma_w \left(1, \frac{w}{\sqrt{3}}(-1, -1, 1) \right) & (a=4) \end{cases}$$

式中: $\gamma_x = (1 - x^2)^{-1/2}$ 。

为简单计, 假设观测者的时空坐标为 $x^\mu = (x^0, x^1, 0, 0)$ 。将上述关系代入式(6.1.30), 由于

$$\langle u^1, x \rangle = \gamma_v \left(x^0 + \frac{v}{\sqrt{3}} x^1 \right) = \langle u^2, x \rangle$$

$$\langle u^3, x \rangle = \gamma_w \left(x^0 - \frac{w}{\sqrt{3}} x^1 \right) = \langle u^4, x \rangle$$

我们得到两个独立的方程

$$\begin{cases} \langle u^1, x \rangle - \sqrt{\langle u^1, x \rangle^2 - \langle x, x \rangle} = (\sqrt{3}x^0 + x^1)/2 \\ \langle u^3, x \rangle - \sqrt{\langle u^3, x \rangle^2 - \langle x, x \rangle} = (\sqrt{3}x^0 - x^1)/2 \end{cases}$$

化简为两个齐次方程

$$\begin{cases} a(v)(x^0)^2 - b(v)x^0x^1 + c(v)(x^1)^2 = 0 \\ a(w)(x^0)^2 + b(w)x^0x^1 + c(w)(x^1)^2 = 0 \end{cases}$$

式中的函数

$$\begin{cases} a(x) = 7\sqrt{3}\sqrt{1-x^2} - 12 \\ b(x) = 6\sqrt{1-x^2} - 4\sqrt{3}(1-x) \\ c(x) = 4x - 3\sqrt{3}\sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

x 表示 v, w 。当它们为已知量时, 即可求得观测者的时空坐标 x^0 和 x^1 。例如, 当 $v=0.77, w=0.83$ 时, $x^0=1/\sqrt{3}, x^1=4$ 。

6.2 脉冲星导航的相对论定位法

6.2.1 2 维平直时空的相对论定位法

通过上面的讨论,发现应用 RPS 的前提条件是导航星座应该具有确定的速度。如果导航星座可以看成分段匀速直线运动,则可以对每一段的发射体初始位置和运动速度建立零标架。如果发射体具有不变的常速度则问题变得相对简单,而 X 射线脉冲星在 BCRS 中的速度(自行)在较长时间内可以看成常数。下面首先来讨论 2 维时空中脉冲星导航的相对论定位法。

在 BCRS 中引入 2 维 Newman-Penrose 标架 $\{\omega_1, \omega_2\}$ 及其坐标 $\{X^1, X^2\} = \{U, V\}$, 与 2 维正交标架 $\{e_0, e_1\}$ 及其坐标 $\{t, x\}$ 的关系分别为

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \end{bmatrix} \quad (6.2.1)$$

$$\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix} \quad (6.2.2)$$

式中的因子 $1/\sqrt{2}$ 保证变换的对称性,使得逆变换与上面的形式相同:

$$t = (U + V)/\sqrt{2}, \quad x = (U - V)/\sqrt{2}$$

根据上面两式可知新标架下的度规和线元分别为

$$g_{ab} = \langle \omega_a, \omega_b \rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.2.3)$$

$$d\tau^2 = g_{ab} dX^a dX^b = 2dUdV \quad (6.2.4)$$

由于度规的对角分量 $g_{11} = g_{22} = 0$, 故 $\{\omega_1, \omega_2\}$ 是零标架。

设脉冲星 a ($a = 1, 2$) 在 BCRS 中的速度 $v^a = \text{常数}$, 根据式 (6.1.15) 和式 (6.2.2), 可知脉冲星的闵氏速度矢量在零标架下的分量也为常量

$$\begin{cases} \frac{dU^a}{d\tau^a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1+v^a}{1-v^a}} = \frac{e^{w^a}}{\sqrt{2}} \\ \frac{dV^a}{d\tau^a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1-v^a}{1+v^a}} = \frac{e^{-w^a}}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad (6.2.5)$$

式中定义的

$$w^a = \ln \sqrt{\frac{1+v^a}{1-v^a}} = \text{arctanh} v^a$$

是 v^a 对应的闵氏时空双曲角,这里只需要理解为一个代号。设脉冲星的初始坐标分别为 $(U^a(0), V^a(0))$, 由上式积分得到它们的坐标是

$$\begin{cases} U^a = U^a(0) + e^{w^a} \tau^a / \sqrt{2} \\ V^a = V^a(0) + e^{-w^a} \tau^a / \sqrt{2} \end{cases} \quad (6.2.6)$$

根据发射点 (U^a, V^a) 与接收点 (U, V) 的时空间隔

$$2(U - U^a)(V - V^a) = 0 \quad (6.2.7)$$

解出 $U = U^a$ 或 $V = V^a$ 。如果航天器位于 2 颗脉冲星之间,则接收点的坐标为

$$\begin{cases} U = U^1 = U^1(0) + e^{w^1} \tau^1 / \sqrt{2} \\ V = V^2 = V^2(0) + e^{-w^2} \tau^2 / \sqrt{2} \end{cases} \quad (6.2.8)$$

式(6.2.8)也可以根据式(6.1.19)求出。将

$$\begin{cases} \xi^{a\mu} = (t - t^a(0), x - x^a(0)) \equiv (\Delta t^a, \Delta x^a) \\ u^{a\mu} = \gamma^a(1, v^a) \end{cases}$$

代入式(6.1.19),求出脉冲星 a 的固有时

$$\tau^a = \gamma^a [(\Delta t^a - v^a \Delta x^a) - |v^a \Delta t^a - \Delta x^a|]$$

分别取 $a=1, 2$ 就得到

$$\begin{cases} \tau^1 = e^{-w^1} (\Delta t^1 + \Delta x^1) & (v^1 \Delta t^1 > \Delta x^1) \\ \tau^2 = e^{w^2} (\Delta t^2 - \Delta x^2) & (v^2 \Delta t^2 < \Delta x^2) \end{cases} \quad (6.2.9)$$

这与式(6.2.8)完全一致。

设脉冲星的初始时空坐标满足

$$t^1(0) = -x^1(0), \quad t^2(0) = x^2(0) \quad (6.2.10)$$

则式(6.2.9)简化成

$$\begin{cases} \tau^1 = e^{-w^1} (t + x) \\ \tau^2 = e^{w^2} (t - x) \end{cases} \quad (6.2.11)$$

变换到时空坐标系,则是

$$\begin{cases} t = \frac{1}{2} (e^{w^1} \tau^1 + e^{-w^2} \tau^2) \\ x = \frac{1}{2} (e^{w^1} \tau^1 - e^{-w^2} \tau^2) \end{cases} \quad (6.2.12)$$

当 2 颗脉冲星的速度 (v^1, v^2) 已知的情况下,航天器的时空坐标 (t, x) 与光坐标 (τ^1, τ^2) 存在一一对应关系。

下面通过图 6.2.1 做具体说明。

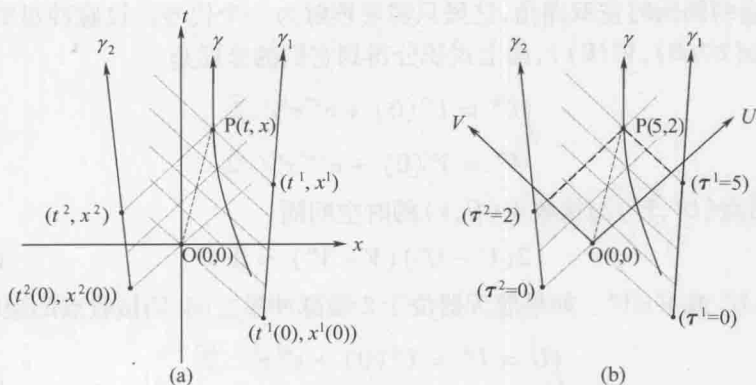


图 6.2.1 发射点和接收点的时空坐标(a)与光坐标(b)

图中 $\{t, x\}$ 和 $\{U, V\}$ 是正交标架和零标架, $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ 是航天器和 2 颗脉冲星的世界线。由于脉冲星做匀速运动, 脉冲星世界线是 2 维时空的斜直线, 与时间轴的夹角 $\theta = \arctan v$ (取 $c = 1$) 反映了脉冲星在 BCRS 中的速度。设 2 颗脉冲星的初始时间和空间坐标分别满足式(6.2.10), 实际上是要求坐标原点的光坐标为 $(0, 0)$, 因为由坐标变换式(6.2.2)可知

$$\begin{cases} U^1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}[t^1(0) + x^1(0)] = 0 \\ V^2(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}[t^2(0) - x^2(0)] = 0 \end{cases}$$

脉冲星不断沿自身的光锥发射光波, 这些波矢量构成坐标系 $\{U, V\}$ 的坐标网格, 每一条波矢量就是一条坐标线, 对应于一颗脉冲星的固有时。例如, 设 2 颗脉冲星的固有周期分别是 P_1, P_2 , 它们每隔一个周期发射一个脉冲, 则图 6.2.1 中 P 点对应的固有时分别为

$$\tau^1 = 5.0P_1, \quad \tau^2 = 2.0P_2$$

即它的光坐标为 (τ^1, τ^2) , 如果用 (U, V) 表示则为 $\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{w^1}\tau^1, e^{-w^2}\tau^2)$ 。

不难看出, 世界线 γ_1, γ_2 将 2 维时空分为 3 个区域, 这里仅考虑航天器空间位置位于中间区域, 也就是满足式(6.2.9)中条件的区域。

6.2.2 4 维弯曲时空的相对论定位法

在引力场中, 脉冲星的固有时与坐标时的关系是

$$d\tau^a = \sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu} dt^a \quad (6.2.13)$$

式中: 点号为对坐标时求导; $g_{\mu\nu}$ 为脉冲星经历的引力场度规。故有

$$\int_0^{\tau^a} \frac{d\tau^a}{\sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu}}} = \int_{t_0^a}^{t^a} dt^a = t - t_0^a - (t - t^a) \quad (6.2.14)$$

在引力场中的光锥形状与引力场的强弱有关,引力场越强光子世界线与时轴的夹角越小,使得光传播时间大于传播(欧氏)距离, $t - t^a > |\mathbf{r} - \mathbf{r}^a|$, 取决于光传播路径上的引力场度规 $g_{\mu\nu}(x)$, 由下式确定:

$$\int_{t_0^a}^t \sqrt{g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu}} dt = 0 \quad (6.2.15)$$

设脉冲星在发射点的位置为

$$\mathbf{r}^a = D^a \mathbf{n}_0^a + \mathbf{v}^a \Delta t^a \quad (\Delta t^a = t^a - t_0^a) \quad (6.2.16)$$

式中: $\mathbf{n}_0^a, D^a = r_0^a$ 分别为脉冲星 a 在初始时刻相对于 SSB 的方向矢量和空间距离; \mathbf{v}^a 为在 SSB 中的固有速度(自行)。在精确到纳秒量级的情况下,由上面两式可求出光传播时间为(见式(5.2.7)、式(5.2.11))

$$\begin{cases} t - t^a = D^a - \mathbf{n}_0^a \cdot \mathbf{r} + \mathbf{n}'^a \cdot \mathbf{v}^a \Delta t^a + R_g \ln(2D^a) - \rho^a(\mathbf{r}) \\ \rho^a(\mathbf{r}) = -\frac{r^2 - (\mathbf{n}_0^a \cdot \mathbf{r})^2}{2D^a} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}^a - (\mathbf{n}_0^a \cdot \mathbf{r})(\mathbf{n}_0^a \cdot \mathbf{v}^a)}{D^a} \Delta t^a + R_g \ln(r + \mathbf{n}_0^a \cdot \mathbf{r}) \end{cases} \quad (6.2.17)$$

这里只考虑太阳的引力作用,并取了近似 $\mathbf{r} + \mathbf{n}_0^a \cdot \mathbf{r} \approx \mathbf{r}_{AS} + \mathbf{n}_0^a \cdot \mathbf{r}_{AS}$, \mathbf{r}_{AS} 是航天器(A)相对于日心(S)的位矢, $R_g = 2GM_s$ 是太阳的引力半径 n'^a 为

$$\mathbf{n}'^a = \mathbf{n}_0^a + \frac{\mathbf{v}^a - (\mathbf{n}_0^a \cdot \mathbf{v}^a) \mathbf{n}_0^a}{2D^a} \Delta t^a \quad (6.2.18)$$

是脉冲星 a 发射光波时刻相对于 SSB 的方向矢量,因为式(6.2.16)满足

$$\mathbf{n}'^a \cdot \mathbf{r}^a = \sqrt{\mathbf{r}^a \cdot \mathbf{r}^a} \quad (6.2.19)$$

将式(6.2.17)代入式(6.2.14),并设脉冲星 a 的初始时间坐标为

$$t_0^a = -D^a - R_g \ln(2D^a) \quad (6.2.20)$$

得到4维观测方程

$$T^a = t + \mathbf{n}_0^a \cdot \mathbf{r} + \rho^a(\mathbf{r}) \quad (6.2.21)$$

其中

$$T^a = \int_0^{\tau^a} \frac{1 + \mathbf{n}'^a \cdot \mathbf{v}^a}{\sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu}}} d\tau^a \quad (6.2.22)$$

是对脉冲星世界线的积分,当脉冲星静止且忽略引力场作用时 $T^a = \tau^a$, 我们仍然可将其看成光坐标,6.2.3节将讨论它的物理意义。

对式(6.2.21)两边微分,得到

$$dT^a = \langle N^a, dx \rangle = N_\mu^a dx^\mu \quad (6.2.23)$$

N_μ^a 是光坐标下的基矢量：

$$N_\mu^a = \frac{\partial T^a}{\partial x^\mu} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{n}^1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \mathbf{n}^4 \end{bmatrix} \quad (6.2.24)$$

$$\mathbf{n}^a = \mathbf{n}_0^a - \frac{\mathbf{r} - (\mathbf{n}_0^a \cdot \mathbf{r}) \mathbf{n}_0^a}{D^a} + \frac{R_g (\hat{\mathbf{r}} + \mathbf{n}_0^a)}{r + \mathbf{n}_0^a \cdot \mathbf{r}} + \frac{v^a - (\mathbf{n}_0^a \cdot \mathbf{v}^a) \mathbf{n}_0^a}{D^a} \Delta t^a \quad (6.2.25)$$

式中： $\mathbf{v}^a - (\mathbf{n}_0^a \cdot \mathbf{v}^a) \mathbf{n}_0^a = \mathbf{v}_\alpha^a + \mathbf{v}_\delta^a$ 为脉冲星的横向速度， $\mathbf{v}_\alpha^a, \mathbf{v}_\delta^a$ 分别为赤经和赤纬自行，当 Δt^a 不是很大时该项可以忽略，否则可将 Δt^a 用 t 近似替代； $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ 为航天器单位位置矢量； \mathbf{n}^a 可看成脉冲星相对于航天器的等效方向矢量，与航天器本身的位置有关（见式(5.3.8)）。

不难求得光坐标下度规张量

$$g^{aa} = \langle N^a, N^a \rangle \approx -\frac{2R_g}{r} \quad (6.2.26)$$

这里已经略去了高阶小量 $O(D^{-2})$ 。式(6.2.26)表明光坐标下的基矢量是随航天器的位置变化的，由此构成的标架并不是严格的零标架，即基矢量在时间轴的投影与3维欧氏空间的投影不相等，但其差值仅与航天器的位置有关而与脉冲星状态无关。这是合理的，因为存在引力场时光子世界线与时间轴的夹角小于 $\pi/4$ 。当忽略引力作用且脉冲星静止于无穷远时才可以看成零标架。

6.2.3 相对论与 TOA 定位的比较

在 XNAV 中，脉冲星作为一个精确时钟，通过稳定地发射光波将它的时间信息传递给观测者。设脉冲星发射光波的固有周期和相位分别是 P^a 和 φ_p^a ，则脉冲星的固有时间 $d\tau^a = P^a d\varphi_p^a$ ，代入式(6.2.22)后得到

$$P_B^a = \frac{1 + \mathbf{n}'^a \cdot \mathbf{v}^a}{\sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu}}} P^a \quad (6.2.27)$$

因为 \mathbf{n}'^a 和 \mathbf{v}^a 是当前时刻脉冲星相对于 SSB（记作 B）的方向矢量和速度，式(6.2.27)正是位于 SSB 的静止观测者接收脉冲星发射光波的周期，包含了多普勒和引力频移效应。

脉冲星的固有时为 $0 \sim \tau^a$ 通过光波传递给 SSB 观测者，对应的坐标时为 $0 \sim t_B^a, t_B^a$ 是 SSB 观测者接收到与航天器接收的同一脉冲的坐标时间。于是光坐标可以化成对 SSB 观测者的世界线积分，即

$$T^a = \int_0^{\tau^a} P_B^a d\varphi_P^a = \int_0^{t_B^a} P_B^a d\varphi_B^a = t_B^a \quad (6.2.28)$$

对于短时间观测,可将脉冲周期看成常数,例如脉冲星 J0534 + 2200 的周期 $P_B = 33.08\text{ms}$ 。因而有

$$T^a = P_B^a [\varphi_B^a(t_B^a) - \varphi_B^a(0)] = P_B^a [\varphi^a(t) - \varphi_B^a(0)] \quad (6.2.29)$$

可见,光坐标实际上取决于航天器接收脉冲轮廓的相位 $\varphi^a(t)$ 。

将式(6.2.28)代入式(6.2.21),则观测方程也可写成

$$\Delta t^a = t_B^a - t = n_0^a \cdot r + \rho^a(r) \quad (6.2.30)$$

$$\Delta t^a = P_B^a [\varphi_B^a(t_B^a) - \varphi_B^a(t)] = P_B^a [\varphi^a(t) - \varphi_B^a(t)] \quad (6.2.31)$$

与现行 3 维观测方程(见式(5.2.13))相同。由此可见,相对论 4 维定位法与 TOA 定位法在理论上是统一的,但观测对象不同。

在 TOA 定位中,观测量由 SSB 和航天器在同一时刻接收的脉冲轮廓相位差确定。SSB 接收脉冲轮廓的相位 $\varphi_B^a(t)$ 并不是直接测量值,而是根据参考时刻标准轮廓的相位 $\varphi_B^a(t_r)$ 由泰勒级数推算出的(见式 5.1.10),即

$$\varphi_B^a(t) = \varphi_B^a(t_r) + f_B^a \cdot (t - t_r) + \dot{f}_B^a (t - t_r)^2 + \dots$$

而航天器接收的观测轮廓相位 $\varphi^a(\tau)$ 是用航天器携带的原子钟显示的固有时记录的。为了比较同一时刻航天器与 SSB 的相位差 $\varphi^a(t) - \varphi_B^a(t)$,必须将航天器固有时精确地转换成 BCRS 的坐标时(或者某个系统时间),在此过程中又必须知道航天器在 BCRS 中的速度和位置:

$$d\tau = \sqrt{g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} dt$$

由于航天器的状态本来就是待求量,这实际上是一种循环。在实践中,可以根据上一时刻航天器的速度和位置值估计当前时刻的状态,但这难免产生误差。

与现行 TOA 定位法比较,相对论定位具有以下优越性:

(1) 相对论 4 维观测方程与 SSB 处的脉冲到达时间、SSB 的日心坐标以及 SSB 处的引力时延无关,不必计算观测者和 SSB 之间的相位差。

(2) 相对论定位法中的观测量是当前时刻观测轮廓的相位,与航天器的速度和所处的引力场无关,不必将航天器固有时转化成坐标时,不必预先知道航天器自身的运动状态。

(3) TOA 定位中观测量的测量存在 3 种误差,除了航天器相位的测量误差外,还包含推算 SSB 在当前时刻相位的模型误差和固有时转换成坐标时的计算误差。而相对论定位的观测量误差只包含航天器的相位测量误差,并且这个误差是无法消除的。

综合上面的讨论,得到以下的结论:

将式(6.2.23)表示为矩阵形式,即

$$dT = NdX \quad (6.2.32)$$

式中: N 为由式(6.2.24)定义的 4×4 变换矩阵; dx 、 dT 分别为 4×1 状态矩阵和观测矩阵, 为

$$dX = \begin{bmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{bmatrix}, \quad dT = \begin{bmatrix} dT^1 \\ dT^2 \\ dT^3 \\ dT^4 \end{bmatrix} \quad (6.2.33)$$

观测量取决于航天器自身在 dt 时间内的相位差, 与 SSB 的观测量无关:

$$dT^a = P_B^a[\varphi^a(t + dt) - \varphi^a(t)] \quad (6.2.34)$$

一般说来, 对不同脉冲星的测量不是等精度的, 设探测器对脉冲星 a 的测量方差为 σ_a^2 , 因不同脉冲星的相位测量相互独立, 协方差矩阵为

$$V(\varphi) = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \sigma_4^2) \quad (6.2.35)$$

由最小二乘法即可解出状态量的最优估计值(见式(5.1.5))

$$dX = (N^T V^{-1}(\varphi) N)^{-1} N^T V^{-1}(\varphi) dT \quad (6.2.36)$$

采用相对论定位法的测量过程可如下进行:

(1) 在某一时刻 $t_k (k=0, 1, \dots)$, 由地面测控站对航天器精确定位确定该时刻航天器的位置, 并设定初始坐标时间, 也就得到航天器的 4 维状态量 $X(t_k)$, 与此同时航天器测量脉冲轮廓的相位 $\varphi^a(t_k)$ 作为观测量的基准。

(2) 将空间坐标代入式(6.2.25), 由于 r 对 $n(r)$ 的影响较小且较慢, 可将 $N(t_k)$ 看成 t_{k+1} 时刻的观测矩阵。根据测量值 $\varphi^a(t_{k+1})$ 由式(6.2.35)求得这一时刻的状态变化量估计值 $dX(t_{k+1})$, 也就得到了 t_{k+1} 时刻的状态量

$$X(t_{k+1}) = X(t_k) + dX(t_{k+1}) \quad (6.2.37)$$

重复第 2 步即可求出后续时间的航天器状态量。如果地面对航天器初始定位精度较高, 相对论定位法的误差主要来源于航天器对脉冲轮廓的相位测量误差, 协方差矩阵为

$$V(X) = (N^T V^{-1}(\varphi) N)^{-1} \quad (6.2.38)$$

以上方法的第 1 步相当于给出了定位的基准, 第 2 步是根据航天器的观测序列中当前时刻的相位求出相对于基准时刻的位移。并且是对 4 维时空而不仅仅是对 3 维空间定位, 优点是可以不用高精度原子钟计时, 还能给出航天器的速度信息, 代价是需要同时测量 4 颗脉冲星。我们认为相对论定位法简单易行, 能够最大限度地减小测量误差, 取代现行的 TOA 观测方程是完全可行的。

参考文献

- [1] Blagojevic M, Garecki J, Hehl F W, et al. Real null coframes in general relativity and GPS type coordinates. *Phys Rev(D)*, 2002, 65(4).
- [2] Coll B, Morales J. Symmetric frames on Lorentz space. *J Math Phys*, 1991, 32.
- [3] Coll B, Ferrando J, Morales J. Two-dimensional approach to relativistic positioning systems. *Phys Rev(D)*, 2006, 73(8).
- [4] Coll B, Ferrando J, Morales J. Positioning with stationary emitters in a two dimensional space-time. *Phys Rev(D)*, 2006, 74(10).
- [5] Coll B, Pozo J. 2006. Relativistic positioning systems: the emission coordinates. *Class Quantum Grav*, 2006, 23.
- [6] Rovelli C. GPS observables in general relativity. *Phys Rev(D)*, 2002, 65(4).
- [7] Ruggiero M L, Tartaglia A. Mapping Cartesian coordinates into emission coordinates: some toy models. *International Journal of Modern Physics(D)*, 2008, 17(2).
- [8] Tartaglia A, Ruggiero M L, Capolongo E. A null frame for spacetime positioning by means of pulsating sources. *Adv Space Res*, 2011, 47.

第7章 空间惯性导航的相对论效应

7.1 惯性导航的基本原理

7.1.1 惯性导航系统概述

目前,地球或其他星体卫星、载人或不载人宇宙飞船、空间站和深空探测器等航天器的空间轨道确定基本上都是依赖于地面测控系统,完全脱离地面测控的空间自主导航一直以来都是各国科学家追求的目标。能够应用于航天器的空间导航方法除了天文导航和研究中的脉冲星导航外,还有惯性导航系统(Inertial Navigation System, INS)。现在一般采用惯性/天文组合导航方法,如果脉冲星导航研究成功,将来有可能采用惯性/脉冲星组合导航,或者惯性/天文/脉冲星组合导航。

相对于卫星导航等其他导航方法,惯性导航具有如下的优缺点:它是自主导航系统,既不依赖外界信息也不向外输出能量,不易受到外界信号的干扰;可以全天候地为地面、近地空间和深空运动载体定位导航,这是其他导航方法都不具备的;能提供载体的位置、速度和姿态角信息,但不提供时间信息;具有良好的稳定性和短期精度,但长期精度较差,因为惯性导航信息是经过积分而产生的,导航误差随时间增大。对于需要长期导航的场合,常常将惯性导航与其他导航方法(如卫星导航、天文导航、地磁导航等)一起构成组合导航系统。

惯性导航技术经历了漫长的发展历程。法国科学家 Foucault 在 1852 年研制的世界上第一台陀螺仪可以看成惯性导航技术的萌芽。第二次世界大战期间德国科学家 Braun 首先将惯性导航应用到火箭上,是现代惯性导航技术的开创者。经过几十年的研究发展,相继发明了微机电加速度计、超导悬浮加速度计、静电悬浮加速度计、全光式惯性传感器、冷原子惯性传感器以及静电陀螺仪、光纤陀螺和原子陀螺仪等惯性元件,惯性导航技术取得了长足的进步,测量精度得到大幅度提高。

从目前的研究水平来看,测量精度最高的是以冷原子干涉仪为基础研制的加速度计和陀螺仪。2003 年,美国国防高级研究计划局(DARPA)为基于原子惯性技术的“精确惯性导航系统(Precision Inertial Navigation System, PINS)”正式立项。它是由微量量级的陀螺仪、加速度计和原子钟构成的微型惯性导航系

统,定位误差设计在 5m/h 范围内,可以在许多军事应用场合替代 GPS,提供高精度的导航定位服务。欧洲空间局(ESA)也制定了“空间高精度冷原子干涉仪(Hyper-precision cold atom interferometry in space, HYPER)”的研究项目,计划应用该技术为空间航天器做姿态测量和轨道控制。可以预期,原子惯性技术是高精度导航的主要发展方向,将在军事导航和航天航空领域得到广泛应用。

我们主要关心应用于航天领域的高精度空间惯性导航系统。由于航天器内部的微重力水平和较低的噪声干扰,为应用惯性导航技术提供了非常好的实验环境,也为进一步提高导航精度提供了条件。例如,地面实验中由于重力影响原子飞行时间和相干长度,使得原子干涉仪的测量精度受到限制,在微重力环境下就可以得到大幅度的改善。又如,目前先进的原子钟准确度为 10^{-14} ,在空间微重力环境下还可以提高几个量级。

应用于航天器的惯性导航系统要求的测量精度较高且测量范围较大,涉及到大规模的引力场分布和时空弯曲效应,必须在相对论框架中讨论。反过来,高精度惯性技术也能够用来检验广义相对论效应,如著名的“引力探测器 B”实验就是用高精度陀螺仪来检测广义相对论预言的时空弯曲效应(见 7.3.5 节)。以下主要分析高精度空间惯性导航测量中涉及的相对论效应,对于具体惯性元件(如加速度计、静电陀螺仪、原子干涉仪等)的技术问题可参考有关专业文献。

7.1.2 惯性导航的基本概念

惯性导航系统由惯性测量元件加速度计和陀螺仪、惯导平台、导航计算机及控制显示器等组成。

根据惯导平台类型可将惯性导航分为两类:平台式和捷联式。平台式惯导中的惯导平台是物理平台,陀螺仪和加速度计置于由陀螺确定的稳定平台上,惯导平台跟踪导航坐标系,便于解出导航参数如速度、位置和姿态角等;捷联式惯导中的惯导平台是计算机模拟的,也称作“数学平台”。陀螺仪和加速度计直接固连在载体上,根据陀螺仪测量的载体角速度信息,实时解出载体坐标系与导航坐标系的方向余弦矩阵,据此将沿载体坐标轴上的加速度分量转换到导航坐标系中,相当于把加速度计的敏感轴稳定在导航坐标轴上,并给出载体的姿态和方位信息。

原始的陀螺仪是安装在框架中绕回转体的对轴高速旋转的物体。陀螺仪具有稳定性和进动性,利用这些特性制成了敏感角速度的速率陀螺和敏感角偏差的位置陀螺。由于光学、冷原子技术的引入,也将能够完成陀螺功能的装置称为陀螺。陀螺仪在平台式惯导中是用来建立一个参考坐标系,这对陀螺仪的漂移值有一定的限制。而对捷联式惯性导航系统,陀螺仪必须以较高的精度在较大的测量范围内测量载体的旋转角速度。

加速度计是惯性导航系统的核心元件,用来测量敏感轴方向的非引力即比

力,从而得到载体相对于特定参考系的加速度,完成惯导系统确定载体的位置和速度的任务。

导航计算机和显示器,给定初始参数及系统需要的其他参数,完成导航计算并显示导航信息。

图 7.1.1 是 2 维空间 $\{x^1, x^2\}$ 平台式惯性导航的一个简单实例。陀螺仪 G 的作用是使平台相对于惯性空间稳定,相对于建立一个稳定坐标系。两个加速度计 A_1 和 A_2 分别测量沿 x^1 和 x^2 轴方向的比力。经过导航数据处理后得到载体相对于某个导航参考系的线加速度 a^1 和 a^2 ,在给定初始条件的情况下通过积分运算,就可以获得载体相对于导航参考系的速度、位置等参数。在 3 维情况下的积分则是($i=1,2,3$)

$$\begin{cases} v^i(t) = \int_{t_0}^t a^i dt + v^i(t_0) \\ x^i(t) = \int_{t_0}^t v^i dt + x^i(t_0) \end{cases} \quad (7.1.1)$$

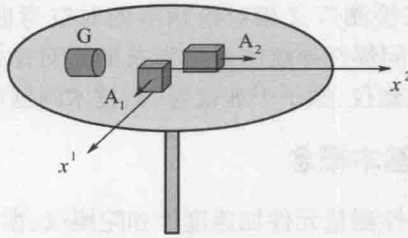


图 7.1.1 2 维空间惯性导航示意图

上面所说的导航坐标系是指求取导航参数选择的坐标系,一般有太阳系质心系(BCRS)、地心系(GCRS)、地球系(TRS)以及地理系和载体坐标系。平台式惯性导航系统中的平台可以模拟导航坐标系,根据平台上加速度计输出的加速度信息在导航坐标系中解出导航参数。而捷联式惯性导航系统则是通过测量沿载体坐标系轴向加速度,将加速度信息分解到导航坐标系中再做导航计算。

7.1.3 TRS 和 GCRS 中的比力方程

惯性导航技术是建立在牛顿力学惯性定律基础上的。牛顿运动方程是加速度计的理论依据,俄罗斯数学和物理学家欧拉和法国科学家拉格朗日建立的刚体绕定点转动的动力学方程,为陀螺仪理论奠定了基础。

图 7.1.2 是超导加速度计的示意图,借此分析加速度计的物理原理。设敏感物体的质量为 m ,弱弹簧的弹性系数为 k ,弹簧振子的固有频率为 $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ 。在不考虑弹簧的质量和阻尼影响的情况下,如果载体(外壳)相对于惯性系沿敏感轴方向有一加速度 a_1 ,则平衡时敏感物体向反方向位移 $x_1 = -a_1/\omega_0^2$,如果沿

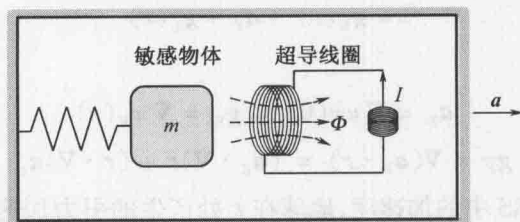


图 7.1.2 超导加速度计原理图

敏感轴方向存在引力加速度 a_G ，则敏感物体向同方向位移 $x_G = a_G / \omega_0^2$ 。因此敏感物体的实际位移为

$$x = x_I + x_G = -\frac{1}{\omega_0^2}(a_I - a_G)$$

敏感物体的位移导致超导线圈的量子磁通 Φ 发生改变，根据迈斯纳效应，线圈的电流 I 将随之变化以抵消磁通的变化，通过测量输出电压即可获得敏感物体的位移进而得到加速度。

在不同的加速度计中，敏感物体不一定受到弹性力作用，可能是其他非引力（例如阻尼、静电、电磁力）或者几种非引力的共同作用。在一般情况下，将敏感物体单位质量所受的非引力定义为比力，即惯性加速度与引力加速度的矢量差

$$\mathbf{f} = \mathbf{a}_I - \mathbf{a}_G \quad (7.1.2)$$

无论何种加速度计，直接测量的是比力而不是相对于惯性系的加速度。

地面和航空机载加速度计一般以地球参考系 (TRS) 为基准。由于 TRS 原点相对于惯性系存在加速度 \mathbf{a}_E ，且转动角速度 $\boldsymbol{\Omega}_E = \text{常矢}$ ，物体相对于惯性系的（绝对）加速度可以写成

$$\mathbf{a}_I = \dot{\mathbf{v}}_{\text{TRS}} + 2\boldsymbol{\Omega}_E \times \mathbf{v}_{\text{TRS}} + \boldsymbol{\Omega}_E \times (\boldsymbol{\Omega}_E \times \mathbf{r}) + \mathbf{a}_E \quad (7.1.3)$$

式中： \mathbf{r} 、 \mathbf{v}_{TRS} 分别为物体在 TRS 中的位矢和速度； $\dot{\mathbf{v}}_{\text{TRS}}$ 为相对于 TRS 的（相对）加速度；右边第 2、3 项分别为物体的科里奥利加速度和向心加速度，第 3、4 两项也统称为牵连加速度。

载体所在处的引力势可分成

$$\begin{aligned} w(\mathbf{r}) &= w_E(\mathbf{r}) + w_{\bar{E}}(\mathbf{r}) \\ &= w_E(\mathbf{r}) + w_{\bar{E}}(0) + \nabla w_{\bar{E}}(0) \cdot \mathbf{r} \end{aligned} \quad (7.1.4)$$

其中， $w_E(\mathbf{r})$ 、 $w_{\bar{E}}(\mathbf{r})$ 分别为由地球 (E) 和除地球外的其他天体如月球、太阳等 (\bar{E}) 产生的引力势， $w_{\bar{E}}(0)$ 则是除地球外的其他天体在地心处产生的引力势，且 $\nabla w_{\bar{E}}(0) = \mathbf{a}_E$ 为地心加速度。故经典引力加速度为

$$\mathbf{a}_G = \nabla w_E(\mathbf{r}) + \nabla w_{\bar{E}}(0) + \nabla(\mathbf{a}_E \cdot \mathbf{r})$$

$$= \mathbf{g}_E(\mathbf{r}) + \mathbf{a}_E + \mathbf{g}_E^-(\mathbf{r}) \quad (7.1.5)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_E &= \nabla w_E^-(0), \quad \mathbf{g}_E = \nabla w_E(\mathbf{r}) \\ \mathbf{g}_E^- &= \nabla(\mathbf{a}_E \cdot \mathbf{r}) = (\mathbf{a}_E \cdot \nabla)\mathbf{r} + (\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{a}_E \end{aligned} \quad (7.1.6)$$

分别是地心在 BCRS 中的加速度,地球在 \mathbf{r} 处产生的引力加速度(引力场强)以及除地球外其他星体在 \mathbf{r} 处产生的潮汐加速度,第 3 式用到 $\nabla \times \nabla w_E^-(0) = 0$ 和 $\nabla \times \mathbf{r} = 0$ 。

由式(7.1.2)和式(7.1.3)得到 TRS 中比力的经典表达式:

$$\mathbf{f} \equiv \mathbf{a}_I - \mathbf{a}_G = \dot{\mathbf{v}}_{\text{TRS}} + 2\boldsymbol{\Omega}_E \times \mathbf{v}_{\text{TRS}} - \mathbf{g}_{\text{eff}} - \mathbf{g}_E^- \quad (7.1.7)$$

其中

$$\mathbf{g}_{\text{eff}} = \mathbf{g}_E - \boldsymbol{\Omega}_E \times (\boldsymbol{\Omega}_E \times \mathbf{r}) \quad (7.1.8)$$

是地球引力加速度和向心加速度构成的等效重力加速度(参见式(3.2.40))。

对于地面和航空机载惯性导航,式(7.1.7)右边最后一项可以忽略。有用的物理量是载体相对于 TRS 的加速度,其他两项 $2\boldsymbol{\Omega}_E \times \mathbf{v} - \mathbf{g}_{\text{eff}}$ 是对导航无用的“有害加速度”。在数据处理中,需要通过建模、补偿和其他方法将有害加速度处理掉,然后对 $\dot{\mathbf{v}}_{\text{TRS}}$ 做积分运算来获取载体相对于 TRS 的速度和位置等信息。

对于航天器机载空间惯性导航,可以取地心参考系(GCRS)作为导航基准,比力的经典表达式简化为

$$\mathbf{f} = \dot{\mathbf{v}}_{\text{GCRS}} - \mathbf{g}_E - \mathbf{g}_E^- \quad (7.1.9)$$

式中: \mathbf{v}_{GCRS} , $\dot{\mathbf{v}}_{\text{GCRS}}$ 分别为物体相对于 GCRS 的速度和加速度。如果忽略最后一项,需要消除的“有害加速度”是地球产生的引力场强。

7.2 空间加速度计的相对论效应

7.2.1 航天器的惯性运动——测地线方程

仔细考察比力公式,它实际上就是牛顿运动定律,并且已经假定物体的惯性质量 m_I 等于引力质量 m_G :

$$\mathbf{f} = \frac{m_I \mathbf{a}_I - m_G \mathbf{a}_G}{m_I} = \mathbf{a}_I - \mathbf{a}_G \quad (7.2.1)$$

式中: \mathbf{a}_I 和 \mathbf{a}_G 分别为相对于惯性系的加速度和引力加速度或引力场强。可见经典理论的比力是牛顿定律与爱因斯坦等效原理的结合。

首先来看惯性系的概念。在 2.1.2 节曾经指出,在经典力学中“惯性参考系”实际上并没有严格定义。但在实际应用中,常常假定遥远的宇宙空间(如

银河系中心)是惯性系,如果某个物体相对于宇宙空间的加速度可以忽略,则可以以此物体为参考物建立惯性系。例如,太阳系质心(SSB)绕银河系中心转动的速度是 10^5 m/s 量级,距离银河系中心约 10^{20} m ,因而SSB的向心加速度为 10^{-10} m/s^2 。如果这个加速度在一般测量中可以忽略不计,就可将太阳系质心参考系(BCRS)看成惯性系。

然而,地球质心相对于SSB的加速度在 10^{-3} m/s^2 量级,因而地心系(GCRS)不是惯性系。但可以做如下的处理:地心的加速度是除地球外其他引力源如太阳、木星、月球等产生的,在经典力学中常常引入一个正比于参考系加速度的惯性力,与这些天体的引力作用在一定近似程度下等值反向。如果既不考虑除地球外其他引力也不考虑相应的惯性力,则GCRS也可以近似看成惯性系或伪惯性系。当然除地球外其他天体的引力除了导致地心的公转加速运动外,还要产生一些微小的摄动(如潮汐力),在高精度测量中必须加以考虑。

对于地球周围航天器在GCRS中的自由运动(“自由”是指仅受引力作用),地球的引力作用正好提供向心加速度,或者说地球对单位质量航天器的引力与惯性力(正比于航天器加速度)相互抵消,即

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_c = 0 \quad (7.2.2)$$

则航天器中的物体处于“失重”状态,如果不受其他非引力作用,则物体做惯性运动。载人宇宙飞船已经为我们提供了很好的实验证明,自由航天器本身是一个局域惯性系。

按照爱因斯坦的广义相对论,引力和惯性力在局域是不可区分的。如果物体没有受到非引力作用则必定做惯性运动,物体的运动轨迹满足测地线方程(见式(2.4.3)):

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \quad (7.2.3)$$

即弯曲时空的测地运动等价于平直时空比力 $\boldsymbol{f}=0$ 的运动。在1PN近似下可以看得更加明确,测地线方程空间分量(取 $\mu = 1, 2, 3$)的1PN表示为(见式(3.1.43))

$$\frac{d^2 \boldsymbol{r}}{dt^2} - \nabla w - \frac{1}{c^2} [v^2 \nabla w - 4\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v} \cdot \nabla w)] = 0 \quad (7.2.4)$$

即测地运动航天器在GCRS中的加速度等于引力加速度。

设航天器受到非引力作用,包括控制推力产生的加速度 $\boldsymbol{a}_{\text{thrust}}$ 、太阳光压加速度 $\boldsymbol{a}_{\text{light}}$ 、大气阻力加速度 $\boldsymbol{a}_{\text{drag}}$ 和其他非引力加速度 $\boldsymbol{a}_{\text{other}}$,与上式一起构成加速度 \boldsymbol{a} ,因而比力表达式为

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{a}_{\text{thrust}} + \boldsymbol{a}_{\text{light}} + \boldsymbol{a}_{\text{drag}} + \boldsymbol{a}_{\text{other}} \quad (7.2.5)$$

根据比力测量结果,可以计算出航天器实际轨迹与目标轨迹(测地线)的偏差,从而达到为航天器导航的目的。处理方法类似于 3.4.5 节,式(7.2.4)的解已经在 3.4.4 节求得(见式(3.4.35)),它是 1PN 近似下的航天器测地线方程。然后将比力看成摄动力,求解摄动方程

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} - \nabla w - \frac{1}{c^2} [v^2 \nabla w - 4\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \nabla w)] = \mathbf{f} \quad (7.2.6)$$

即可得到航天器的实际轨迹与测地线的偏差。

空间惯性导航的处理方法不同于地面和近地空间导航,其根本原因在于测地运动航天器本身就是惯性系。

7.2.2 航天器内的潮汐力——测地偏离方程

严格地说,“测地运动航天器是一个惯性系”是将航天器看成一个质点而言。对于具有一定空间的航天器,其内部仍然存在微弱的重力即所谓微重力,场强一般在 10^{-6}m/s^2 量级,在高精度加速度计的感知范围内。

假定航天器的质心(也可以不是质心) $A(x^\mu)$ 严格地做测地运动,即运动效应严格地抵消了重力作用,我们来分析质心邻域内另一点 $B(x^\mu + \xi^\mu)$ 的微重力。 $\xi^\mu = (\xi^0, \xi)$ 表示两个世界点的时空间隔,例如图 7.2.1 中 A、B 的时间间隔与 A' 、 B' 的时间间隔相同(ξ^0),但空间间隔不同($\xi \neq \xi'$)。

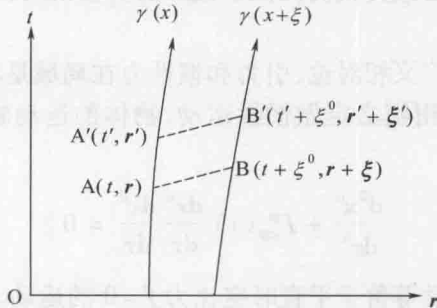


图 7.2.1 相邻时空点及其测地线

设航天器质心 A 的测地线方程 $\gamma(x)$ 由式(7.2.3)表示,经过邻近点 B 的测地线方程 $\gamma(x+\xi)$ 则为

$$\frac{d^2}{d\tau^2}(x^\mu + \xi^\mu) + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x + \xi) \frac{d}{d\tau}(x^\alpha + \xi^\alpha) \frac{d}{d\tau}(x^\beta + \xi^\beta) = 0 \quad (7.2.7)$$

由于 $\xi \ll x$, 式中的联络系数可展开成

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x + \xi) = \Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x) + \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\mu}{\partial x^\gamma} \xi^\gamma$$

将上式代入式(7.2.7)后减去式(7.2.3),并略去高阶小量,得到

$$\frac{d^2\xi^\mu}{d\tau^2} = -\frac{\partial\Gamma_{\alpha\beta}^\mu}{\partial x^\gamma} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \xi^\gamma - 2\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{d\xi^\beta}{d\tau} \quad (7.2.8)$$

上式的另一种形式是用绝对导数表示的,利用逆变矢量的绝对微分式(2.1.29),求出 ξ^μ 对固有时的2次绝对导数:

$$\begin{aligned} \frac{D^2\xi^\mu}{d\tau^2} &= \frac{d}{d\tau} \left(\frac{d\xi^\mu}{d\tau} + \frac{dx^\alpha}{d\tau} \xi^\gamma \Gamma_{\alpha\gamma}^\mu \right) + \left(\frac{d\xi^\rho}{d\tau} + \frac{dx^\alpha}{d\tau} \xi^\gamma \Gamma_{\alpha\gamma}^\rho \right) \frac{dx^\beta}{d\tau} \Gamma_{\rho\beta}^\mu \\ &= \frac{d^2\xi^\mu}{d\tau^2} + \frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} \Gamma_{\alpha\gamma}^\mu \xi^\gamma + 2 \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{d\xi^\gamma}{d\tau} \Gamma_{\alpha\gamma}^\mu + \left(\frac{\partial\Gamma_{\alpha\gamma}^\mu}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\rho \Gamma_{\rho\beta}^\mu \right) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \xi^\gamma \\ &= - \left(\frac{\partial\Gamma_{\alpha\beta}^\mu}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial\Gamma_{\alpha\gamma}^\mu}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^\rho \Gamma_{\rho\gamma}^\mu - \Gamma_{\alpha\gamma}^\rho \Gamma_{\rho\beta}^\mu \right) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \xi^\gamma \\ &= -R_{\alpha\gamma\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \xi^\gamma \quad (7.2.9) \end{aligned}$$

第3步用到式(7.2.3)和式(7.2.8), $R_{\alpha\gamma\beta}^\mu$ 为式(2.1.36)定义的黎曼曲率张量。

上面两式称作测地偏离方程,有两种等价的解释:按照广义相对论的观点,式(7.2.9)表示黎曼空间两个相邻点存在相对加速度 $D^2\xi^\mu/d\tau^2$,取决于弯曲空间的曲率,且正比于两点的时空间隔 ξ^γ ;而式(7.2.8)可以用后牛顿引力理论来解释,闵氏空间中两个相邻点的相对加速度为 $d^2\xi^\mu/d\tau^2$,由引力场的联络及其导数所决定。或者说,测地线 $\gamma(x)$ 所处的引力场强为 $\mathbf{g}(x)$ (对应于 $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x)$),而 $\gamma(x+\xi)$ 所处的引力场是 $\mathbf{g}(x+\xi)$ (对应于 $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x+\xi)$),由于存在引力梯度 $\nabla\mathbf{g}$ 导致两条相邻测地线之间存在相对加速度。事实上,即使在牛顿引力理论中这个加速度也是存在的,即潮汐力。但后牛顿理论的加速度表述更为精确。

为了避开复杂的数学运算,以式(7.2.8)为基础讨论1PN近似下的测地偏离方程表达式。

设地球周围的引力场是史瓦西场,1PN度规为

$$\begin{cases} g_{00} = 1 - 2w/c^2 \\ g_{kk} = - (1 + 2w/c^2) \quad (k = 1, 2, 3) \end{cases}$$

$w = w(\mathbf{r})$ 是地球周围引力场的标量势。根据联络系数定义式(2.4.4)得到空间分量

$$\Gamma_{\alpha\beta}^k = \frac{1}{2} g^{kk} \left(\frac{\partial g_{k\beta}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{k\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^k} \right) \quad (k = 1, 2, 3) \quad (7.2.10)$$

由此求出不为0的分量为

$$\begin{cases} \Gamma_{kk}^k = \frac{1}{c^2} \frac{\partial w}{\partial x^k} & (k = 1, 2, 3) \\ \Gamma_{00}^k = \Gamma_{ii}^k = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial w}{\partial x^k} & (i = 1, 2, 3; i \neq k) \\ \Gamma_{ki}^k = \Gamma_{ik}^k = \frac{1}{c^2} \frac{\partial w}{\partial x^i} & (i = 1, 2, 3; i \neq k) \end{cases} \quad (7.2.11)$$

这里取了近似(见式(3.1.22)): $g^{kk} \approx -1$ 。上面3个方程分别给出3个、9个和12个分量,这24个分量均是与时空无关的空间函数,即 $\partial \Gamma_{\alpha\beta}^k / \partial x^0 = 0$ 。

因为式(7.2.8)的右边必定是小量,可以忽略航天器固有时与坐标时的区别($d\tau \approx dt$),4维速度近似取为

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} \approx \left(\frac{dx^0}{dt}, \frac{dx^i}{dt} \right) = (c, v^i)$$

$$\frac{d\xi^\mu}{d\tau} \approx \left(\frac{d\xi^0}{dt}, \frac{d\xi^i}{dt} \right) = (v_\xi^0, v_\xi^i)$$

将上述关系及联络系数式(7.2.11)代入式(7.2.8)后,就得到测地偏离方程的1PN表示

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi^k}{dt^2} = & \frac{\xi^i}{c^2} \left[(c^2 + v^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x^i \partial x^k} - 2v^j v^k \frac{\partial^2 w}{\partial x^i \partial x^j} \right] \\ & + \frac{2}{c^2} \left[(cv_\xi^0 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_\xi) \frac{\partial w}{\partial x^k} - 2v^i v_\xi^i \frac{\partial w}{\partial x^i} \right] \end{aligned} \quad (7.2.12)$$

在一般情况下,关心在固定的时间间隔测量航天器内部2个固定点的加速度,也就是限制B和A在引力场中的4维速度相同:

$$v_\xi^0 = 0, \quad v_\xi^i = 0$$

第1式表示B与A的时间间隔一直保持不变($\xi^0 = \text{常数}$),第2式表示两点相对静止($\xi^i = \text{常数}$)。在此情况下式(7.2.12)简化成

$$\frac{d^2 \xi^k}{dt^2} = \xi^i \left[\left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{2v^j v^k}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^i \partial x^j} \right] \quad (7.2.13)$$

记引力势的2阶导数或引力场强的梯度为

$$w_{ij} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial g_j}{\partial x^i} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

这9个分量构成3维欧氏空间的并矢或2阶张量

$$\vec{\vec{W}} = w_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$$

于是潮汐加速度式(7.2.13)可以写成矢量形式

$$\mathbf{a}_{\text{tidal}} = \frac{d^2 \boldsymbol{\xi}}{dt^2} = \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \nabla w - \frac{2}{c^2} (\boldsymbol{\xi} \cdot \vec{W} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} \quad (7.2.14)$$

这就是包含相对论效应的潮汐力表达式,条件是测量点(B)相对于基准点(A)静止。对于地球周围的航天器,上式可以精确到 10^{-14} m/s^2 。

潮汐力是航天器内部的微重力,对于高精度空间加速度计应该考虑它的作用,将潮汐力加入到比力式(7.2.5)中:

$$\mathbf{f} = \mathbf{a}_{\text{thrust}} + \mathbf{a}_{\text{light}} + \mathbf{a}_{\text{drag}} + \mathbf{a}_{\text{tidal}} = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{\text{tidal}} \quad (7.2.15)$$

其中, \mathbf{a}_A 为航天器质心或整体加速度,是由于所有非引力作用产生的,而潮汐加速度是相对于质心的加速度,来源于引力场的空间不均匀性。

然而导航,需要测量航天器的整体加速度,潮汐加速度并不提供有用的信息,应该尽量消除掉。幸运的是潮汐力式(7.2.14)具有以下特性:

$$\mathbf{a}_{\text{tidal}}(\boldsymbol{\xi}) = -\mathbf{a}_{\text{tidal}}(-\boldsymbol{\xi}) \quad (7.2.16)$$

即潮汐力关于基准点反对称。利用这一性质,我们总可以通过设计具有球对称分布的加速度计组合来消除潮汐力(包括相对论效应)的影响,达到为航天器定位导航的目的。7.2.3节叙述的就是加速度计组合的一个实例。

7.2.3 抵消潮汐力的加速度计组合

首先介绍测量引力场分布的经典引力梯度计,然后分析空间惯性导航的加速度计组合,二者的处理方法类似。

由于地球周围航天器的速度 $v \ll c$,在式(7.2.14)中略去高阶小量 v^2/c^2 ,就得到经典潮汐力表达式

$$\mathbf{a}_{\text{tidal}}^N = (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \nabla w \quad (7.2.17)$$

从这里也可以看出,经典公式表述的是引力场中两个静止点之间的潮汐力,既没有考虑它们在引力场中的运动($\mathbf{v}=0$),也没有计入两点之间的相对运动($\mathbf{v}_{\xi}=0$)。

取地球周围引力势 $w = \mu_E/r$,以地球径向为 ξ^3 轴建立笛卡儿坐标系,根据上式求得潮汐力分量

$$\mathbf{a}_{\text{tidal}}^N = \left(-\frac{\mu_E}{r^3} \xi^1, -\frac{\mu_E}{r^3} \xi^2, \frac{2\mu_E}{r^3} \xi^3 \right) \quad (7.2.18)$$

如图7.2.2所示,航天器内部的一个水珠呈现出椭球体,竖直方向被潮汐力拉伸而水平方向受潮汐力挤压。但是对于一个十分坚硬和相当对称的旋转球体,潮汐力并不构成相对于质心的力矩,在7.3.5节将要介绍的GP-B实验就考虑到了这个因素。如果航天器质心距离地心 $r = 10000 \text{ km}$,在航天器内部相距

$\xi = 1\text{m}$ 的两点间潮汐力的量级约为 10^{-6}m/s^2 , 这与太阳光压、大气阻力等产生的加速度量级相当。而相对论效应导致的加速度修正值约为经典值的 10^{-8} 倍, 这里暂且忽略。

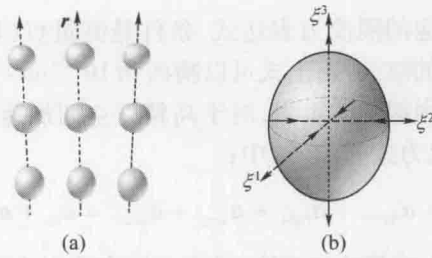


图 7.2.2 引力场中的水珠形状

(a) 不同位置的水珠形状; (b) 水珠所受潮汐力。

从式(7.2.18)可以看出, 虽然潮汐力反比于 r^3 , 其绝对值很小, 但对位置的改变相当敏感。引力梯度计就是利用这个特性, 通过测量潮汐力来计算引力梯度进而得到引力场分布。

根据式(7.2.15)和式(7.2.17)可知航天器内部加速度计测量的比力分量为

$$\begin{bmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_A^1 \\ a_A^2 \\ a_A^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} \quad (7.2.19)$$

式中的 3×3 方阵称作引力梯度张量, 其矩阵元是对称的 ($w_{ij} = w_{ji}$), 又因为地球外部区域的引力势满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 w = w_{11} + w_{22} + w_{33} = 0$$

所以引力梯度张量只有 5 个独立分量, 即

$$W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{12} & w_{22} & w_{23} \\ w_{13} & w_{23} & -(w_{11} + w_{22}) \end{bmatrix} \quad (7.2.20)$$

图 7.2.3 是 GOCE(Gravity Field and Ocean Circulation Explorer)设计的由 12 个加速度计组成的引力梯度计。图中箭头表示加速度计的敏感轴方向, 每个坐标平面内有 4 个敏感轴方向相同的加速度计, 每个加速度计位于 3 个坐标轴上距离原点 $\pm \xi$ 处。

设位于 $n(n=1, 2, \dots, 6)$ 处, 敏感轴沿 ξ^i 轴的加速度计测量值为 $f^i(n)$, 由

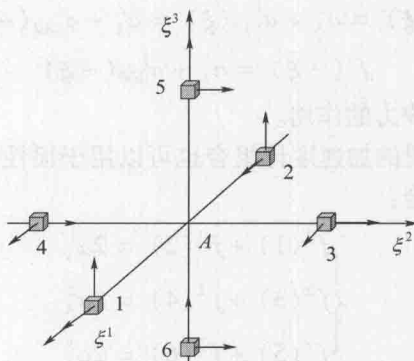


图 7.2.3 加速度计组合示意图

式(7.2.19)可得加速度计线性组合的测量值为

$$\begin{cases} f^1(1) - f^1(2) = 2w_{11}\xi, \\ f^3(1) - f^3(2) = 2w_{13}\xi, \\ f^1(3) - f^1(4) = 2w_{12}\xi, \\ f^2(3) - f^2(4) = 2w_{22}\xi, \\ f^2(5) - f^2(6) = 2w_{23}\xi, \\ f^3(5) - f^3(6) = 2w_{33}\xi \end{cases} \quad (7.2.21)$$

由此即可解出引力梯度张量。航天器在不同点测得的引力梯度是空间的函数 $w_{ij} = w_{ij}(x)$, 对其做空间积分即可获到引力场场强分布

$$g_i(x) = \int w_{ij}(x') dx'^j \quad (i = 1, 2, 3) \quad (7.2.22)$$

引力梯度计是为了测量引力梯度, 应该尽量消除航天器整体加速度的影响。但对惯性导航刚好相反, 应消去潮汐力的影响而保留航天器的整体加速度。

在考虑相对论效应的情况下, 潮汐力应该用式(7.2.14)表示, 这时的比力表达式(7.2.15)的矩阵形式为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} f^1 \\ f^2 \\ f^3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_A^1 \\ a_A^2 \\ a_A^3 \end{bmatrix} + \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} \\ &\quad - \frac{2}{c^2} \begin{bmatrix} v^1 & v^2 & v^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.2.23)$$

由于潮汐力具有特性式(7.2.16), 因而位于 $\pm \xi$ 处的比力

$$f^i(\xi) = a_A^i + a_{\text{tidal}}^i(\xi) = a_A^i - a_{\text{tidal}}^i(-\xi)$$

$$f^i(-\xi) = a_A^i + a_{\text{tidal}}^i(-\xi)$$

二者之和即可抵消潮汐力的作用。

按照图 7.2.3 设置的加速度计组合也可以用于惯性导航, 取其中的 6 个加速度计做下列线性组合:

$$\begin{cases} f^1(1) + f^1(2) = 2a_A^1 \\ f^2(3) + f^2(4) = 2a_A^2 \\ f^3(5) + f^3(6) = 2a_A^3 \end{cases} \quad (7.2.24)$$

在实践中, 如果采用超导加速度计组合, 将敏感轴方向相同的两个加速度计 (如 1 和 2) 串联在一起, 测量两个超导线圈的输出电压之和就表示两个加速度计的位移之和, 也就是 $\pm\xi$ 处的加速度之和, 由式 (7.2.24) 即可求出航天器的整体加速度 a_A 。可见在高精度惯性导航中, 采用加速计组合的方法可以消除经典潮汐力及其相对论效应的影响。

7.3 空间陀螺仪的相对论效应

7.3.1 陀螺仪的经典测量原理

传统意义上的陀螺仪是力学概念, 是指绕回转体对称轴高速旋转的物体, 具有非常稳定的定轴性。随着微机电、光学和冷原子技术的引入, 现在人们把具有这种特性的装置统称为陀螺仪, 如静电陀螺仪、光纤陀螺仪和原子陀螺仪等。

静电陀螺仪具有相当高的测量精度, 角速度测量精度达到 10^{-9}rad/s , 曾用于美国“引力探测器 B”空间实验 (见 7.3.5 节)。如图 7.3.1 所示, 静电陀螺仪的关键元件是相当完美的球形转子, 在静电场作用下自由悬浮于真空容器内, 可以最大限度地消除外加阻尼。位于 x, y 轴上的 4 个启动线圈产生交变磁场导致

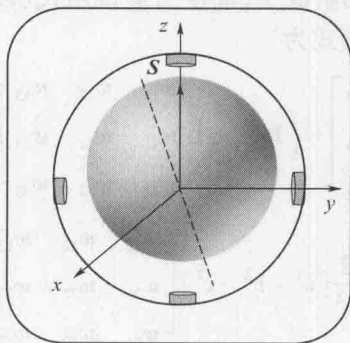


图 7.3.1 静电陀螺仪原理图

转子绕 z 轴高速旋转, z 轴上两个线圈的作用是将转子的转轴固定在几何中心轴方向, 不至于产生振荡。

静电陀螺仪的测量原理实际上与力学陀螺仪是一致的。根据经典力学的角动量定理, 高速旋转物体的自旋矢量 \mathbf{S} 与相对于质心的外力矩 \mathbf{M}_e 的关系为 (见式(1.3.50))

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \mathbf{M}_e \quad (7.3.1)$$

根据矢量微分的定义, 如果一个矢量的大小保持不变, $|\mathbf{S}| = \text{常数}$, 则变化率

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{S} \quad (|\mathbf{S}| = \text{常数}) \quad (7.3.2)$$

其中, $\boldsymbol{\Omega}$ 为矢量的转动速度, 因其垂直于 \mathbf{S} 和 $d\mathbf{S}/dt$ 构成的平面, 故称作进动角速度。维持转速不变的转子, 在不受到任何外力矩作用的情况下, 其转轴将始终沿着同一方向。测量载体本体的某一方向与自旋方向的夹角即可确定其姿态。

图 7.3.2 是光学陀螺仪 (包括激光和光纤陀螺仪) 原理图, 其理论基础是 Sagnac 效应 (见 3.3.5 节)。将一束光波分成两束沿不同方向发射, 经不同传播路径后相遇, 如果载体相对于惯性系不变, 则两束光不会产生干涉; 如果载体在 $x-y$ 平面内以角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ 转动, 则两束光存在相位差 (见式(3.3.32)) 为

$$\delta\varphi_{\text{light}} = 2f\delta t = \frac{4\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{A}}{\lambda c} \quad (7.3.3)$$

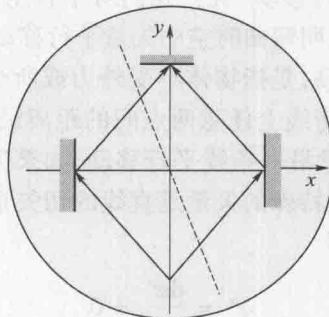


图 7.3.2 光学陀螺仪原理图

光波的频率和波长满足 $f\lambda = c$, \mathbf{A} 是两条光路包围的干涉仪面积。相位差导致两束光在相遇点发生干涉, 根据干涉条纹可以获得载体的转动角速度。

高精度原子陀螺仪的测量原理也是基于 Sagnac 效应。一束原子物质波被原子分束器相干分裂成两束物质波, 当它们沿不同路径传播后相遇时, 也存在类

似于上式的相位差因而发生干涉现象。不同的是上式中光波波长和光速应换成 de Broglie 波的波长 λ_{dB} 和群速度即原子质心运动速度 v ：

$$\delta\varphi_{\text{atom}} = \frac{4\Omega \cdot A}{\lambda_{\text{dB}} v} = \frac{4m\Omega \cdot A}{h} \quad (7.3.4)$$

式中：用到原子的动量 $mv = h/\lambda_{\text{dB}}$ ， h 为普朗克常量； m 为原子质量（严格地说是指相对论质量而不是静止质量）。

由于 $\lambda_{\text{dB}} \ll \lambda$ ， $v \ll c$ ，对于相同的角速度和干涉仪面积， $\delta\varphi_{\text{atom}} \gg \delta\varphi_{\text{light}}$ ，即原子陀螺仪比激光陀螺仪的灵敏度大大提高。事实上，由式 (7.3.3)、式 (7.3.4) 得到两种陀螺仪的相位差之比正好是原子能量与光子能量的比值：

$$\frac{\delta\varphi_{\text{atom}}}{\delta\varphi_{\text{light}}} = \frac{mc^2}{hf}$$

对于铯原子 ($m = 133u$) 陀螺仪和 He-Ne 激光 ($\lambda = 633\text{nm}$) 陀螺仪，理论上前者的灵敏度是后者的 10^{10} 倍。但是实际上并不能达到这个值，因为原子干涉仪的面积并不能做到与激光干涉仪相等以及其他因素的限制。

光学陀螺仪和原子陀螺仪用作惯性元件，是指两列光波或物质波在惯性参考系具有相同光程，在相对于惯性系转动的参考系中则存在光程差，两列波光程相同时对应的轴向（如图 7.3.2 中 y 轴）相当于力学或静电陀螺仪的自旋方向。

7.3.2 弯曲时空的矢量平移

将陀螺仪作为惯性元件，是因为它有一个非常特殊的性质——定轴性：在不受外力矩或所受合外力矩为零的情况下，其自旋矢量在惯性空间保持平行移动。那么，什么叫“矢量平行移动”呢？我们对平直空间的平移概念是熟悉的，下面就从平直时空入手，说明弯曲时空中矢量平行移动的几何意义。

在平直时空的惯性运动，是指物体不受外力或所受合外力为零情况下做匀速直线运动。所谓直线是指线上任意两点间的距离最短，即短程性。但还有一种定义是平行性：一个矢量沿一条线平行移动，如果矢量与该线的夹角保持不变，则它是一条直线。一个特殊的矢量是直线的切矢量 u^μ ，当它沿直线平时，其大小和方向保持不变，即

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = 0$$

这是 4 维平直时空匀速直线运动方程也是切矢量平行移动满足的方程。如果有一个大小不变的矢量 S^μ 与切矢量的夹角始终保持不变，即内积 $\langle u^\mu, S^\mu \rangle = \text{常数}$ ，对弧长微分后就有

$$\left\langle \frac{du^\mu}{d\tau}, S^\mu \right\rangle + \left\langle u^\mu, \frac{dS^\mu}{d\tau} \right\rangle = 0$$

由上面两式可知,如果切矢量 u^μ 平移,则矢量 S^μ 也做平移,故任意矢量平移必定满足(见式(1.3.54))

$$\frac{dS^\mu}{d\tau} = 0$$

弯曲时空的惯性运动,是指物体仅受到引力作用下的测地运动。将测地线方程式(7.2.4)改写成

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha u^\beta = 0 \quad (7.3.5)$$

表示4维速度对固有时的绝对导数为0。弯曲时空的测地线也有两种等价的解释,即短程性和平行性:短程性是指测地线上任意两个世界点之间距离最短;而平行性是指测地线上各点的切矢量 u^μ 都是平行的,或者说切矢量沿测地线平行移动。从矢量平移的角度来看,式(7.3.5)表示当4维速度矢量发生变化时,将 $u^\mu(t+dt)$ 平行移动到 $u^\mu(t)$ 处然后比较二者的矢量差。如果沿着测地线平行移动则协变导数 $Du^\mu/d\tau=0$,但普通导数 $du^\mu/d\tau$ 一般并不为0。与平直时空的情况类似,如果有一个大小不变的矢量 S^μ 与切矢量的夹角始终保持不变,则在弯曲时空的矢量平移应满足

$$\frac{dS^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu S^\alpha u^\beta = 0 \quad (7.3.6)$$

当 S^μ 表示物体的4维自旋时,式(7.3.6)就是弯曲空间自由运动物体的自旋守恒律(见式(2.1.44))。

如图7.3.3(a)所示,设3条测地线AB,BC,CA构成2维弯曲空间的测地三角形,可以想象为一个球面上的3条大圆弧构成的球面三角形(大圆是指经过球心的平面与球面的交线,为球面上的短程线)。当一个矢量 $S(t)$ 从A点开始沿测地线平移,保持与3条测地线切矢量的夹角分别为 α, β, γ ,则它回到A点时与原矢量并不重合,其差值 $S(3) - S(0) \neq 0$ 是由空间弯曲效应造成的。而在2

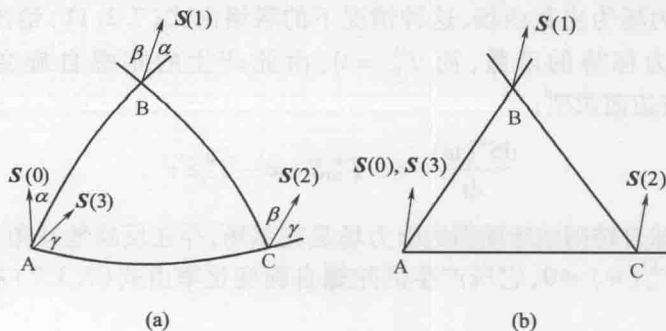


图 7.3.3 矢量沿测地线的平移

(a) 2 维弯曲空间的矢量平移; (b) 2 维平直空间的矢量平移。

维平直空间(平面),矢量沿3条直线(测地线)平移的结果必然是重合,如图7.3.3(b)所示。

设 S^μ 是陀螺仪的4维自旋矢量,则式(7.3.6)是陀螺仪沿弯曲时空测地线运动时自旋矢量平行移动满足的方程。由于 $dS^\mu/d\tau$ 是小量,可做一些近似处理。考虑航天器沿地球引力场的测地线运动,由于航天器的3维速度 $v \ll c$ 且地球引力场较弱,固有时与坐标时的区别可以忽略($d\tau = dt$),故航天器的4维速度矢量为

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \approx \frac{dx^\mu}{dt} = (c, \mathbf{v})$$

陀螺仪4维自旋矢量 S^μ 的空间分量为 \mathbf{S} ,其时间分量可如下求得:应用式(2.1.43), $g_{\mu\nu}S^\mu u^\nu = 0$,近似有

$$S^0 c = - \frac{g_{11}}{g_{00}} \mathbf{S} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{v}$$

即4维自旋矢量可近似处理成平直时空的自旋(见式(1.3.52))

$$S^\mu \approx (\mathbf{S} \cdot \mathbf{v}/c, \mathbf{S})$$

将 u^μ, S^μ 表达式代入式(7.3.6),得到自旋矢量空间分量的变化率

$$\begin{aligned} \frac{dS^k}{dt} &= -\Gamma_{00}^k \mathbf{S} \cdot \mathbf{v} - \Gamma_{ij}^k S^i v^j - \Gamma_{0i}^k (S^i c + \mathbf{S} \cdot \mathbf{v}^i/c) \\ &\approx -\Gamma_{00}^k \mathbf{S} \cdot \mathbf{v} - \Gamma_{ij}^k S^i v^j - \Gamma_{0i}^k S^i c \end{aligned} \quad (7.3.7)$$

因 $v \ll c$,第2步略去了更高阶小量。式(7.3.7)也称作陀螺方程,它表明陀螺仪的自旋矢量并非始终指向同一方向,随时间变化率与陀螺仪所在空间的引力场分布有关,这是广义相对论的一个重要结论。如果不存在引力场(所有联络分量 $\Gamma_{\alpha\beta}^k = 0$),则时空是平直的,这时才有 $dS^k/dt = 0$ 。

进一步分析陀螺仪在地球周围引力场中的运动。当不考虑地球自转时,地球周围的引力场为史瓦西场,这种情况下的联络由式(7.2.11)给出, $\Gamma_{00}^k(w)$, $\Gamma_{ij}^k(w)$ 为引力标势的函数,而 $\Gamma_{0i}^k = 0$,由此产生的陀螺自旋变化率只含式(7.3.7)右边前两项:

$$\frac{dS^k(w)}{dt} = -\Gamma_{00}^k \mathbf{S} \cdot \mathbf{v} - \Gamma_{ij}^k S^i v^j \quad (7.3.8)$$

如果考虑地球自转则地球周围的引力场是克尔场,存在反映地球角动量的引力矢势,使得 $\Gamma_{0i}^k(w) \neq 0$,它所产生的陀螺自旋变化率由式(7.3.7)右边第3项确定:

$$\frac{dS^k(w)}{dt} = -\Gamma_{0i}^k S^i c \quad (7.3.9)$$

式(7.3.8)和式(7.3.9)表明陀螺自旋矢量的变化率由两部分组成,分别来源于引力场的标势 w 和矢势 \mathbf{w} ,下面两节分别讨论。

7.3.3 空间陀螺仪的测地进动

设地球周围的引力场是史瓦西场,只存在引力标势。将联络系数式(7.2.11)代入式(7.3.8),得到3个方程($k=1,2,3$):

$$\frac{dS^k}{dt} = \frac{1}{c^2} \left[2(\mathbf{S} \cdot \mathbf{v}) \frac{\partial w}{\partial x^k} - (\nabla w \cdot \mathbf{S}) v^k - (\mathbf{v} \cdot \nabla w) S^k \right] \quad (7.3.10)$$

合并成矢量形式

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{S}}{dt} &= \frac{1}{c^2} [2(\mathbf{S} \cdot \mathbf{v}) \nabla w - (\nabla w \cdot \mathbf{S}) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla w) \mathbf{S}] \\ &= \frac{1}{c^2} [(\mathbf{v} \times \nabla w) \times \mathbf{S} + (\mathbf{S} \times \nabla w) \times \mathbf{v}] \end{aligned} \quad (7.3.11)$$

这就是史瓦西场中测地运动陀螺仪的自旋矢量随时间变化率。

考虑到上式右边必定是一小量,瞬时变化率没有实际测量意义,我们关心陀螺仪绕地球运行一个周期的平均效果,因此需要对上式取平均。在陀螺仪轨道平面内建立坐标系 $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y\}$,取卫星运动轨迹为圆或近似圆,有瞬时关系

$$\begin{cases} \nabla w = -\frac{\mu_E}{r^2} (\cos\phi \mathbf{e}_x + \sin\phi \mathbf{e}_y) \\ \mathbf{v} = -v(\sin\phi \mathbf{e}_x - \cos\phi \mathbf{e}_y) \end{cases}$$

ϕ 是 \mathbf{r} 与 \mathbf{e}_x 的夹角。将这些关系代入式(7.3.11)后利用下式求平均:

$$\langle A \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A(\phi) d\phi$$

得到一个周期的平均变化率为

$$\left\langle \frac{d\mathbf{S}}{dt} \right\rangle = \frac{3}{2c^2} (\mathbf{v} \times \nabla w) \times \mathbf{S} \quad (7.3.12)$$

由式(7.3.2)可知陀螺仪在一个周期内的平均进动角速度为

$$\boldsymbol{\Omega}_{\text{GP}} = \frac{3}{2c^2} \mathbf{v} \times \nabla w \quad (7.3.13)$$

注意:虽然上面的推导用到一些特例(如取标量势为牛顿引力势),但此式具有普遍意义,对任意的标量势 w 均成立。对于地球的牛顿引力势 $w = \mu_E/r$,可得到

$$\boldsymbol{\Omega}_{\text{GP}} = \frac{3\mu_E}{2c^2 r^3} \mathbf{r} \times \mathbf{v} \quad (7.3.14)$$

其方向沿陀螺仪轨道(测地线)平面的法向。这一现象称为测地进动,也称作 de Sitter 进动,因为它是 de Sitter 在 1916 年首先发现的。

另外,地球四极矩也对陀螺仪的进动有贡献,因为地球四极矩也产生引力标量势(见式(3.1.31)):

$$w_Q = -\frac{\mu_E J_{2E} R_E^2}{2r^3} (3\cos^2\theta - 1)$$

由式(7.3.13)可求得赤道轨道面内($\theta = \pi/2$)陀螺仪的进动角速度

$$\Omega_{GP}^{(Q)} = \frac{3}{2c^2} \mathbf{v} \times \nabla w_Q = \frac{3J_{2E} R_E^2}{2r^2} \Omega_{GP} \quad (\text{赤道轨道}) \quad (7.3.15)$$

其方向与 Ω_{GP} 相同,但量值较小,仅为测地进动的 10^{-3} 倍。

将测地进动与狭义相对论效应—托马斯进动做一比较是有意义的。把电子和原子核看成质点,当电子在原子核产生的电场 \mathbf{E} 中以向心加速度 $\mathbf{a} = -e\mathbf{E}/m_e$ 运动时(e 和 m_e 分别是电子电量和质量),电子除了本身的自旋外还有一个进动角速度

$$\Omega_{TP} = \frac{1}{2c^2} \mathbf{a} \times \mathbf{v} = \frac{e}{2m_e c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E} \quad (7.3.16)$$

方向垂直于 \mathbf{a} 和 \mathbf{v} 构成的平面即电子运动轨道面。这种现象称作托马斯进动,它是托马斯在 1926 年研究电子自旋时发现的。

式(7.3.16)与式(7.3.13)确实很相似,如果将该式中的 $\nabla w = \mathbf{g}$ 看成引力场强的话。这实际上是将引力场类比为静电场,如图 7.3.4 所示。由于这个缘故,也有文献将测地进动说成是“引力电场效应”。但从广义相对论的角度来看,二者的物理机制不完全相同,托马斯进动来源于电子在电场中的加速曲线运动($\mathbf{a} \times \mathbf{v} \neq 0$)即非测地运动,而测地进动则是对物体在引力场中的测地运动,是由于时空弯曲造成的。

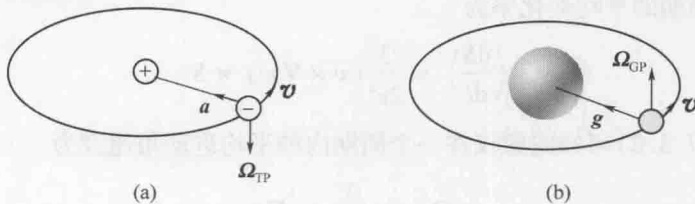


图 7.3.4 托马斯进动与测地进动的比较

(a) 电场中托马斯运动; (b) 引力场中测地进动。

7.3.4 空间陀螺仪的 Lense-Thirring 进动

当考虑地球自转时,地球引力场应该用更为精确的克尔场表示:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2w}{c^2}\right)(cdt)^2 - \left(1 + \frac{2w}{c^2}\right)dl^2 + \frac{8\mathbf{w}}{c^3} \cdot d\mathbf{r}(cdt)$$

式中：时空交叉项的度规为

$$g_{0i} = \frac{4w^i}{c^3}, \quad \mathbf{w} = \frac{G\mathbf{J}_E \times \mathbf{r}}{2r^3} \quad (7.3.17)$$

$\mathbf{w} = (w^1, w^2, w^3)$ 是地球自转产生的矢量势(见式(2.2.20))。由式(7.2.10)可求得联络系数

$$\Gamma_{0i}^k \approx -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{0k}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{0i}}{\partial x^k} \right) = -\frac{2}{c^3} \left(\frac{\partial w^k}{\partial x^i} - \frac{\partial w^i}{\partial x^k} \right) \quad (7.3.18)$$

这里取了近似 $g^{0k}=0, g^{kk}=-1$ (参见式(3.1.22))。

将式(7.3.18)代入到式(7.3.9),得

$$\frac{dS^k}{dt} = \frac{2}{c^2} \left(\frac{\partial w^k}{\partial x^i} - \frac{\partial w^i}{\partial x^k} \right) S^i$$

这3个方程($k=1,2,3$)可合并成矢量形式

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{2}{c^2} \nabla \times \mathbf{w} \times \mathbf{S} \quad (7.3.19)$$

与式(7.3.2)比较,得到

$$\boldsymbol{\Omega}_{\text{LTP}} = \frac{2}{c^2} \nabla \times \mathbf{w} \quad (7.3.20)$$

可见,引力场的矢量势也导致陀螺仪产生的进动,其角速度取决于矢量势的旋度。这一现象称为 Lense-Thirring 进动,是由 Lense 和 Thirring 在 1918 年首先发现的。

对矢量势求旋度,因地球的自转角动量 \mathbf{J}_E 是常矢量且 $\nabla \cdot (\mathbf{r}/r^3) = 0$, 可得

$$\nabla \times \mathbf{w} = -\frac{G}{2} (\mathbf{J}_E \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{G}{2r^3} (3\mathbf{e}_r \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{J}_E - \mathbf{J}_E)$$

$\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$ 是地心径向单位矢量。故地球引力场的 Lense-Thirring 进动角速度为

$$\boldsymbol{\Omega}_{\text{LTP}} = \frac{G}{c^2 r^3} (3\mathbf{e}_r \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{J}_E - \mathbf{J}_E) \quad (7.3.21)$$

式中的自转角动量也可写成地球的转动惯量与自转角速度的乘积:

$$\mathbf{J}_E = I_E \boldsymbol{\Omega}_E$$

可见 $\boldsymbol{\Omega}_{\text{LTP}}$ 位于 \mathbf{r} 和 $\boldsymbol{\Omega}_E$ 构成的平面内。

上式是进动角速度与陀螺仪质心位置矢量的瞬时关系,对一个周期平均可

以看出平均效果。取地球角动量 $\mathbf{J}_E = J_E \mathbf{e}_z$, $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_z = \cos\theta$, θ 为 \mathbf{r} 与 z 轴的夹角, 对于圆轨道或近似圆轨道, 平均值为

$$\boldsymbol{\Omega}_{\text{LTP}} = \frac{GJ_E}{c^2 r^3} (3 \langle \cos\theta \mathbf{e}_r \rangle - \mathbf{e}_z) \quad (7.3.22)$$

若陀螺仪沿地球极地轨道运动, 因 $\mathbf{e}_r = \sin\theta \mathbf{e}_x + \cos\theta \mathbf{e}_z$, 周期平均值

$$\langle \cos\theta \mathbf{e}_r \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos^2\theta \mathbf{e}_z + \sin\theta \cos\theta \mathbf{e}_x) d\theta = \frac{1}{2} \mathbf{e}_z$$

故进动角速度与地球自转轴方向相同:

$$\boldsymbol{\Omega}_{\text{LTP}} = \frac{G}{2c^2 r^3} \mathbf{J}_E \quad (\text{极地轨道}) \quad (7.3.23)$$

如果陀螺仪轨道平面为赤道面, 因 $\cos\theta = 0$, 进动角速度与地球自转轴方向相反:

$$\boldsymbol{\Omega}_{\text{LTP}} = -\frac{G}{c^2 r^3} \mathbf{J}_E \quad (\text{赤道轨道}) \quad (7.3.24)$$

在这两种情况下, Lense-Thirring 进动导致轨道面绕地球自转轴转动, 等价于参考系统 z 轴发生转动。

在一般情况下, 大质量物体的转动(矢量势)导致参考系或者周围时空相对于遥远星体发生相应的转动, 故也将 Lense-Thirring 进动称作参考系拖曳或结构拖曳效应。

我们来比较 Lense-Thirring 进动与磁场中磁矩的进动。在 3.1.3 节曾经说明, 引力场的矢量势 \mathbf{w} 对应于电磁场的矢势 \mathbf{A} , 因而 $\nabla \times \mathbf{w}$ 对应于磁感应强度:

$$\mathbf{w} \rightarrow \mathbf{A}, \quad \nabla \times \mathbf{w} \rightarrow \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

设有一个磁矩为 \mathbf{m} 的试验线圈放置于磁场中, 则它受到磁场的转动力矩 $\mathbf{M}_{\text{mag}} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$ 的作用。根据角动量定理, 线圈磁矩的变化率为

$$\frac{d\mathbf{m}}{dt} = \mathbf{m} \times \nabla \times \mathbf{A} = \boldsymbol{\Omega}_{\text{mag}} \times \mathbf{m}$$

第 2 步是由式(7.3.2)来的。故磁矩的进动角速度

$$\boldsymbol{\Omega}_{\text{mag}} = -\nabla \times \mathbf{A}$$

这与 Lense-Thirring 进动表达式(7.3.20)很相似。因此, 有文献将 $k \nabla \times \mathbf{w}$ (k 为常数)定义为“引力磁场强度”, 是由引力源的自旋产生的, Lense-Thirring 进动则可看成陀螺仪在“引力磁场”作用下的转动, 或称为“引力磁场效应”。在图 7.3.5 中给出了赤道面内 Lense-Thirring 进动与磁矩进动情况的比较。

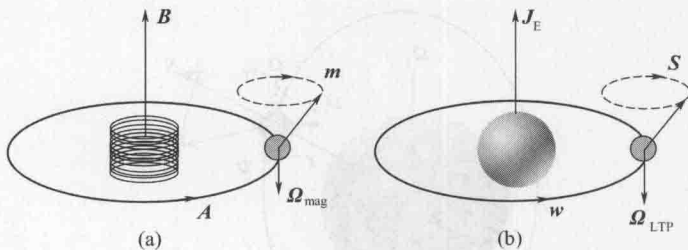


图 7.3.5 磁场进动与 Lense-Thirring 进动的比较
(a) 磁场中的磁矩进动; (b) 引力场中的 Lense-Thirring 进动。

7.3.5 测地进动和 Lense-Thirring 进动的实验验证

综合上面两节的结论,当陀螺仪在地球周围沿测地线运动时,它的自旋矢量将会产生测地进动和 Lense-Thirring 进动,总进动为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega}_P &= \boldsymbol{\Omega}_{GP} + \boldsymbol{\Omega}_{LTP} \\ &= \frac{G}{c^2 r^3} \left[\frac{3}{2} M_E \mathbf{r} \times \mathbf{v} + I_E (3 \mathbf{e}_r \cdot \boldsymbol{\Omega}_E - \boldsymbol{\Omega}_E) \right] \quad (7.3.25)\end{aligned}$$

其大小和方向与陀螺仪本身的自旋无关,取决于陀螺仪在引力场中的运动轨迹。

早在 1959 年,美国物理学家 Schiff 和 Pugh 就提出用卫星搭载陀螺仪来验证上述两个相对论效应。美国航空航天局(NASA)经过大量投入和长时间研究论证,终于在 2004 年发射了一颗科学实验卫星“引力探测器 B(Gravity Probe B, GP-B)”,运行在距离地球 642km 的极地椭圆轨道上,半长轴、偏心率、周期、近地点角距、升交点赤经和轨道倾角等轨道参数分别为

$$\begin{aligned}a &= 7027.4 \text{ km}, \quad e = 0.0014, \quad P = 97.5 \text{ min}, \\ \omega &= 71.3^\circ, \quad \Omega = 163.26^\circ, \quad i = 90.007^\circ\end{aligned}$$

根据式(7.3.25),可以算出极地椭圆轨道上测地进动和 Lense-Thirring 进动的理论值分别为

$$\Omega_{GP}^{\text{theory}} = 6.61''/\text{yr}, \quad \Omega_{LTP}^{\text{theory}} = 0.039''/\text{yr}$$

转动轴分别垂直于轨道面和沿地球自转轴方向,如图 7.3.6 所示,图中 S_0 和 S 表示陀螺仪自旋矢量的初始指向和最终指向。

GP-B 的实验装置由 1 架望远镜和 4 个高精度静电陀螺仪构成(其中 3 个备份),为了消除潮汐力矩的影响,陀螺仪的转子是误差小于 10^{-6} 的相当完美的石英小球。实验原理很简单:通过精确控制将望远镜的轴线始终对准遥远的导航星座——飞马座的双星 HR8703(IM Pegasi),这个天体提供了一个固定的基准方向。初始时,陀螺仪自转轴沿着望远镜轴线并消除所有的外力矩的作用,经

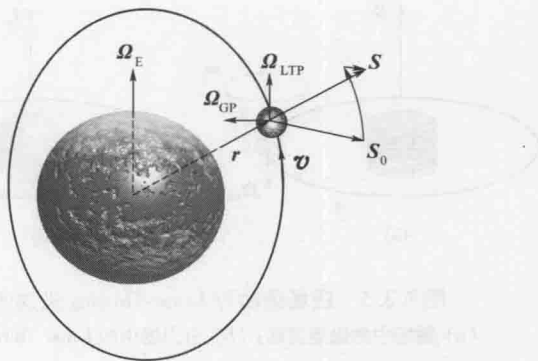


图 7.3.6 极地轨道陀螺仪的测地进动和 Lense-Thirring 进动

过一段时间运行后测量陀螺仪自转轴方向与望远镜轴线的夹角。如果按照牛顿力学,陀螺仪的指向将保持不变,而相对论则断定会产生进动。经过一年多的空间实验后,测量陀螺仪自转轴方向确实发生了改变,测地进动和 Lense-Thirring 进动的测量值分别为

$$\Omega_{GP}^{\text{test}} = 6.602 \pm 0.018''/\text{yr}, \quad \Omega_{LTP}^{\text{test}} = 0.0372 \pm 0.0072''/\text{yr}$$

与相对论预言的理论值符合的很好,但 Lense-Thirring 进动的测量精度约为 20%,没有达到 1% 的预期目标。关于 GP-B 实验的技术分析可参阅文献[1]。

GP-B 实验证实了引力导致时空弯曲和旋转,被认为是迄今为止检验广义相对论效应的最精确的经典实验,甚至有人断言,如果人们仍然质疑广义相对论,就应该做出比 GP-B 更加精确的实验。在 2.3.2 节提及的 GP-A 实验以及其他许多实验也都证明了相对论的正确性。

这两个效应特别是测地进动效应是有实用价值的。虽然它们对经典力学规律的修正值很小,但有一个明显的特点是具有可加性,随着观测时间的增加,测地进动和 Lense-Thirring 进动的累加值不断增加。例如,在 XNAV 实践中需要将 X 射线探测器始终对准遥远的导航星座脉冲星,方向误差一般在毫角秒量级。如果应用惯性技术,探测器指向将在长时间观测中逐渐偏离脉冲星方向,必须不断进行方向修正才能保证正常运行。

参考文献

- [1] 丁衡高,贺晓霞,高钟毓.应用惯性技术验证广义相对论.北京:清华大学出版社,2013.
- [2] 胡文瑞,等.微重力科学概论.北京:科学出版社,2010.
- [3] 申文斌,宁津生,晁定波.相对论与相对论重力测量.武汉:武汉大学出版社,2008.
- [4] De Sitter W. On Einstein's theory of gravitation and its astronomical consequences. Mon Not Roy Astron Soc, 1916, 77.
- [5] Everitt C W F, Parkinson B W, et al. Gravity probe B: Post flight analysis. NASA Final Report, 2007.

- [6] Everitt C W F, Debra D B, Parkinson B W, et al. Gravity probe B: Final results of a space experiment to test general relativity. *Phys Rev Lett*, 2011, 106(22).
- [7] Jentsch C, Moller T, Rasel E M, et al. HYPER: A satellite mission in fundamental physics based on high precision atom interferometry. *General Relativity and Gravitation*, 2004, 36(10).
- [8] John M, Lowell R. A vision for precision inertial navigation system. DARPA PINS Meeting, Arlington, Virginia, 2003.
- [9] Lense J, Thirring H. über den einfluss der eigenrotation der zentralkörper auf die bewegung der planeten und monde nach der Einsteinschen gravitationstheorie. *Physikalische Zeitschrift*, 1918, 19.
- [10] Thomas L T. Motion of the spinning electron. *Nature*, 1926, 117.
- [11] Visser P. Exploring the possibilities for star-tracker assisted calibration of the six individual GOCE accelerometers. *J Geod*, 2008, 82.

天文常数表

名称(符号)	数 值
光年(l. y.)	1l. y. = $9.4605 \times 10^{15} \text{ m}$
秒差距(pc)	1pc = $3.0856 \times 10^{16} \text{ m}$
天文单位(AU)	1AU = $1.495985 \times 10^{11} \text{ m}$
真空中光速(c)	$2.99792458 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
引力常数(G)	$6.67259 \times 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$
太阳质量(M_{S})	$1.989 \times 10^{30} \text{ kg}$
引力常数($\mu_{\text{S}} = GM_{\text{S}}$)	$1.327 \times 10^{20} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$
引力半径($R_{\text{gS}} = 2\mu_{\text{S}}/c^2$)	$2.953 \times 10^3 \text{ m}$
平均半径(R_{S})	$6.960 \times 10^8 \text{ m}$
四极矩参数($J_{2\text{S}}$)	约 2×10^{-7}
自转角动量(J_{S})	约 $10^{41} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
赤道面与黄道面交角	$7^\circ 10.5'$
地球质量(M_{E})	$5.978 \times 10^{24} \text{ kg}$
引力常数($\mu_{\text{E}} = GM_{\text{E}}$)	$3.986 \times 10^{14} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$
引力半径($R_{\text{gE}} = 2\mu_{\text{E}}/c^2$)	$8.870 \times 10^{-3} \text{ m}$
平均半径(R_{E})	$6.371 \times 10^6 \text{ m}$
赤道半径(R_{eq})	$6.378 \times 10^6 \text{ m}$
极半径(R_{po})	$6.357 \times 10^6 \text{ m}$
四极矩参数($J_{2\text{E}}$)	1.083×10^{-3}
自转角速度(Ω_{E})	$7.292 \times 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$
自转角动量(J_{E})	$5.779 \times 10^{33} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
自转周期(P_{E})	23h56min4.09s
公转轨道半长轴(a_{E})	1.0AU
公转轨道偏心率(e_{E})	0.0167
公转轨道周期(T_{E})	365d6h9min11s
公转平均速度	约 $3 \times 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
公转平均加速度	约 $6 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
赤道面与黄道面交角	$23^\circ 26'$

(续)

名称(符号)	数 值
月球质量(M_M)	$7.350 \times 10^{22} \text{ kg}$
引力常数($\mu_M = GM_M$)	$4.904 \times 10^{11} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$
引力半径($R_{\text{gM}} = 2\mu_M/c^2$)	$1.091 \times 10^{-4} \text{ m}$
平均半径(R_M)	$1.738 \times 10^6 \text{ m}$
四极矩参数(J_{2M})	2.027×10^{-4}
自转周期(P_M)	27.322d
绕地轨道半长轴(a_M)	$3.844 \times 10^8 \text{ m}$
绕地轨道偏心率(e_M)	0.0555
绕地轨道周期(T_M)	27.322d
白道面与黄道面交角	$5^\circ 09'$
水星质量	$3.302 \times 10^{23} \text{ kg}$
轨道半长轴/偏心率/周期	0.3871AU/0.2056/87.97d
金星质量	$4.869 \times 10^{24} \text{ kg}$
轨道半长轴/偏心率/周期	0.7233AU/0.0067/224.7d
火星质量	$6.419 \times 10^{23} \text{ kg}$
轨道半长轴/偏心率/周期	1.5237AU/0.0935/1.881yr
木星质量	$1.899 \times 10^{27} \text{ kg}$
轨道半长轴/偏心率/周期	5.2034AU/0.0489/11.86yr
土星质量	$5.685 \times 10^{26} \text{ kg}$
轨道半长轴/偏心率/周期	9.5371AU/0.0565/29.46yr
天王星质量	$8.683 \times 10^{25} \text{ kg}$
轨道半长轴/偏心率/周期	19.1913AU/0.0457/84.01yr
海王星质量	$1.024 \times 10^{26} \text{ kg}$
轨道半长轴/偏心率/周期	30.0689AU/0.0113/164.8yr

内 容 简 介

本书在 2007 年初版基础上做了全面修订和扩充,较为系统地叙述了相对论及其在现代导航中的应用。前 3 章简要介绍狭义和广义相对论的基本原理,着重阐述后牛顿引力理论及其在空间实验中的相对论效应。后 4 章分析经典相对论特别是后牛顿引力理论在卫星导航、脉冲星导航以及空间惯性导航中的应用,还介绍了相对论定位系统的基本原理及其应用前景。

本书适合于理工科大专院校和科研机构的本科生和研究生阅读,也可供有关导航、测绘、空间技术和相对论等领域的科研人员和教师参考。

The book made a completely revised and expanded on the basis of the first edition, more systematic account of the theory of relativity and its application in modern navigation. The first three chapters briefly introduces the basic principles of special and general relativity, post-Newtonian gravitational theory and relativistic effects in space experiment. After four chapters analyze classical relativity and post-Newtonian gravitational theory especially in satellite navigation, pulsar-based navigation and inertial navigation in space, but also introduces the basic principles of relativistic positioning system and its application prospects.

This book is suitable for undergraduate and graduate students in science and engineering universities and research institutions to read, also available to researchers and teachers of the navigation, mapping, space technology, relativity and other areas.